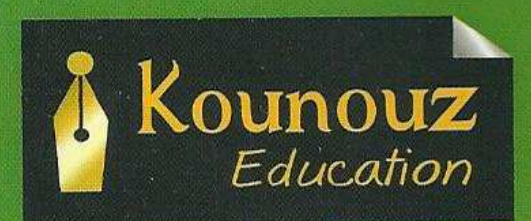




Première année de l'enseignement secondaire

Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

$y = \frac{-x}{2} + 1$

$2a+b=x^{2x}$

4u

pi=3.141592654

x	y
-2	?
0	?
2	?
4	?

- Résumés de Cours
- Exercices



Corrigés Détaillés
de tous les exercices



MATHÉMATIQUES

1^{èr} Année

- *Résumés*
- *Exercices*
- *Corrigé des exercices*

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur Principal
des écoles préparatoires et des lycées

Sami Ben Rhim
Professeur d'enseignement
Secondaire

Mohamed Ben Brahim
Professeur principal

Abdbasset Laataoui
Professeur Principal

Sommaire

Sommaire

Les angles

I) Résumé du cours

- ***Droites parallèles et angles :***

Propriétés :

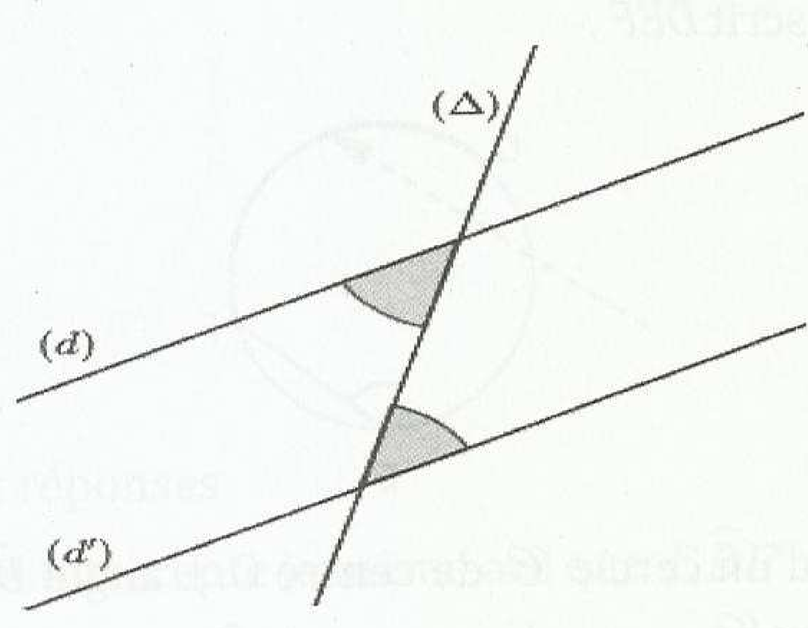
↬ **Propriété 1**: Si deux droites sont parallèles alors toute sécante commune forme des angles alternes-internes de même mesure.

↬ **Propriété 2**: Si deux droites sont parallèles alors toute sécante commune forme des angles correspondants de même mesure.

Exemple: Sur la figure, les droites (d) et (d') sont parallèles.

L'angle rouge et l'angle orange sont alternes internes pour les droites (d) et (d') coupées par la sécante(Δ).

Comme les droites (d) et (d') sont parallèles, l'angle rouge et l'angle orange ont la même mesure.

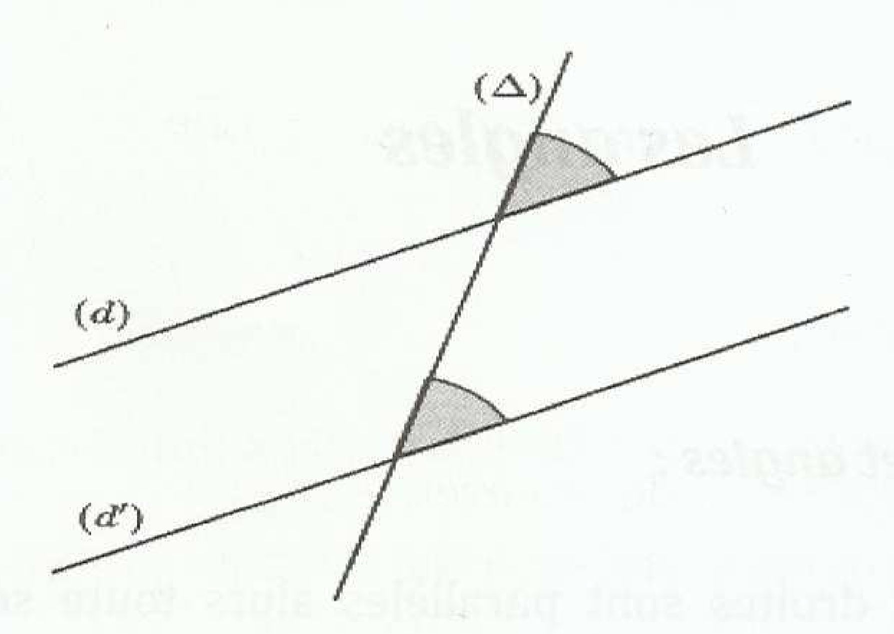


Propriétés réciproques :

↬ **Propriété3 :** Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

↬ **Propriété 4** : Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

Exemple : l'angle bleu et l'angle vert sont correspondants pour les droites (d) et (d') coupées par la sécante(Δ) Comme l'angle bleu et l'angle vert ont la même mesure, les droites (d) et (d') sont parallèles.



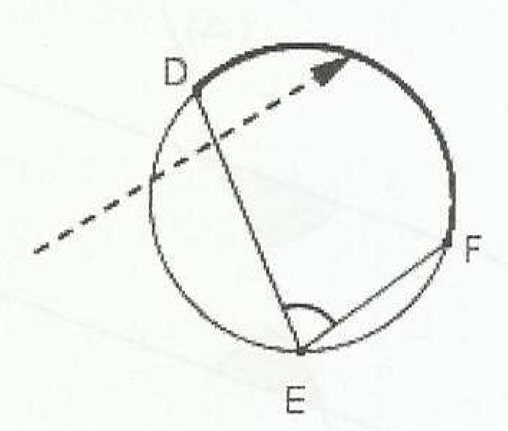
Les propriétés 1 et 2 servent à démontrer que les angles ont la même mesure.
Les propriétés 3 et 4 servent à démontrer que les droites sont parallèles.

- ***Angles inscrits et angles au centre :***

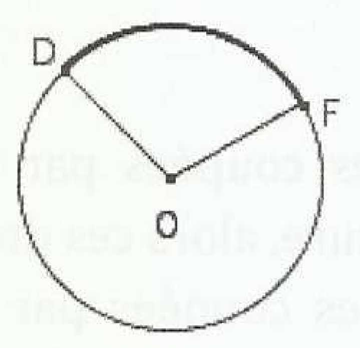
Vocabulaire :

D, E et F sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$. On dit alors que $\widehat{DEF}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

L'arc du cercle $\mathscr{C}$ d'extrémités D et F qui ne contient pas E est appelé arc du cercle intercepté par l'angle inscrit $\widehat{DEF}$.

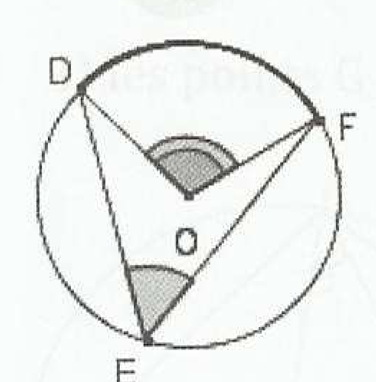


D et F sont deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. L'angle $\widehat{DOF}$ (rentrant ou saillant) est appelé angle au centre $\mathscr{C}$.

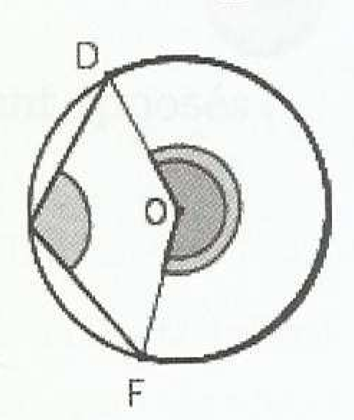


Propriétés

Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

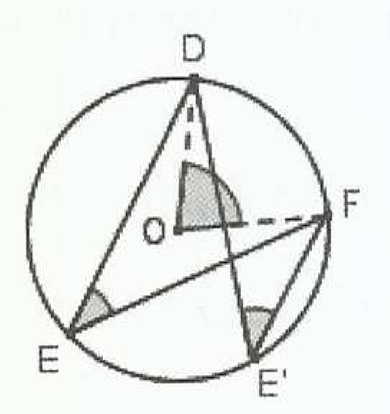


Pour les deux figures on a : $\widehat{DOF} = 2\ \widehat{DEF}$

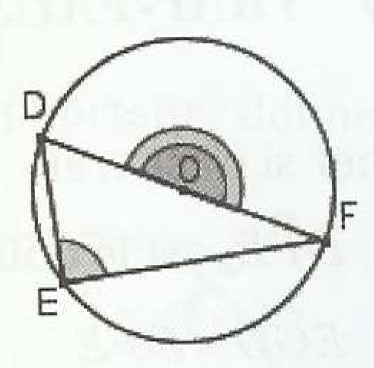


De la propriété précédente on déduit deux autres.

- Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ces deux angles sont de même mesure.



- Si $\widehat{DEF}$ est inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[DE]$ alors le triangle DEF est rectangle en F



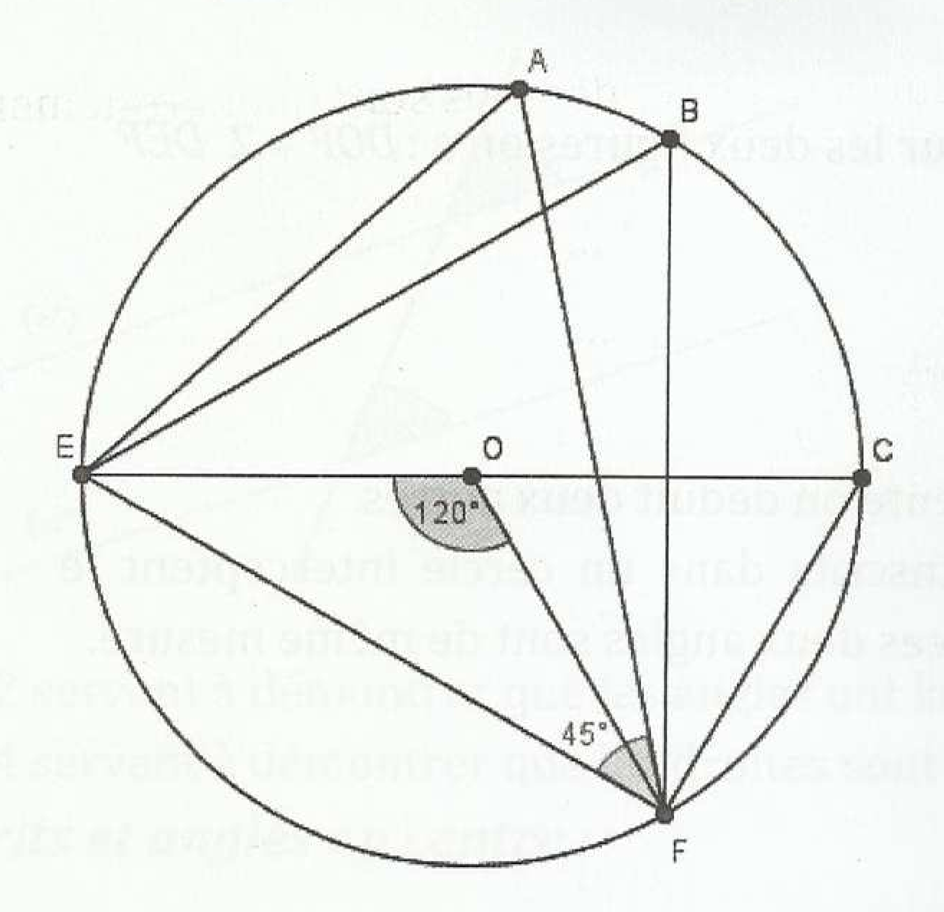
II) Exercices



Q-C-M

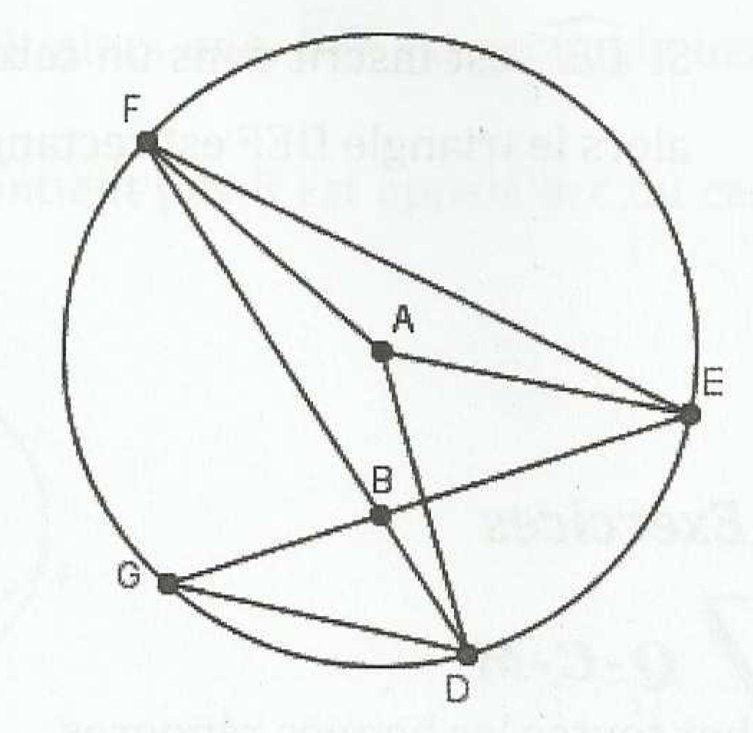
Cocher toutes les bonnes réponses

1) L'angle au centre qui intercepte le même arc que $E\widehat{B}F$ est:
❑ $E\widehat{A}F$ ❑ $B\widehat{O}F$ ❑ $E\widehat{C}F$ ❑ $E\widehat{O}F$
2) L'angle inscrit qui intercepte le même arc que $E\widehat{A}F$ est :
❑ $E\widehat{C}F$ ❑ $E\widehat{O}F$ ❑ $B\widehat{E}F$ ❑ $E\widehat{B}F$
3) L'angle de mesure 60° est :
❑ $E\widehat{C}F$ ❑ $E\widehat{A}F$ ❑ $C\widehat{F}O$ ❑ $C\widehat{O}F$
4) Les deux droites perpendiculaires sont :
❑(EB) et (AF) ❑(EF) et (CF) ❑(OA) et (OE) ❑(EC) et (BF)





VRAI-FAUX



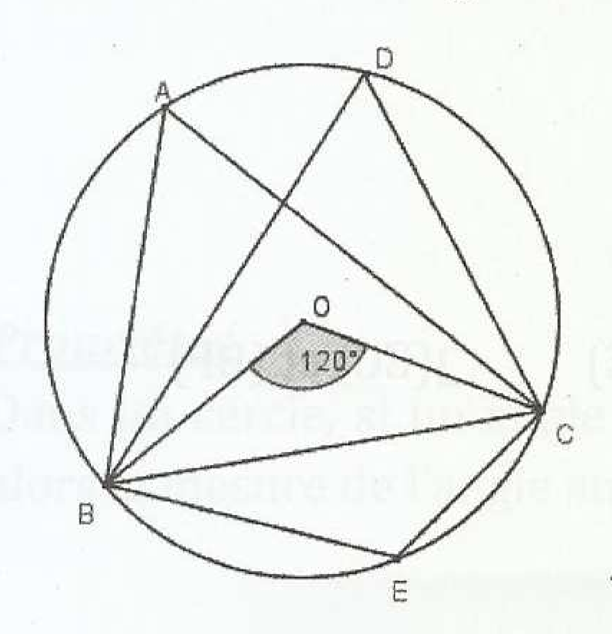
Cocher si c'est vrai

1) $D\widehat{F}E$ est le double de $D\widehat{A}E$ ❑
2) $E\widehat{G}D = D\widehat{F}E$ ❑
3) $D\widehat{A}E$ est le double de $E\widehat{G}D$ ❑
4) $F\widehat{B}G = F\widehat{E}G$ ❑
5) $E\widehat{G}D$ est la moitié de $D\widehat{A}E$ ❑
6) $F\widehat{A}D = 2 \times F\widehat{E}G$ ❑



3 APPLIQUER

1) Déterminer par un petit calcul (mais sans justification théorique) les angles demandés sur les figures suivantes.

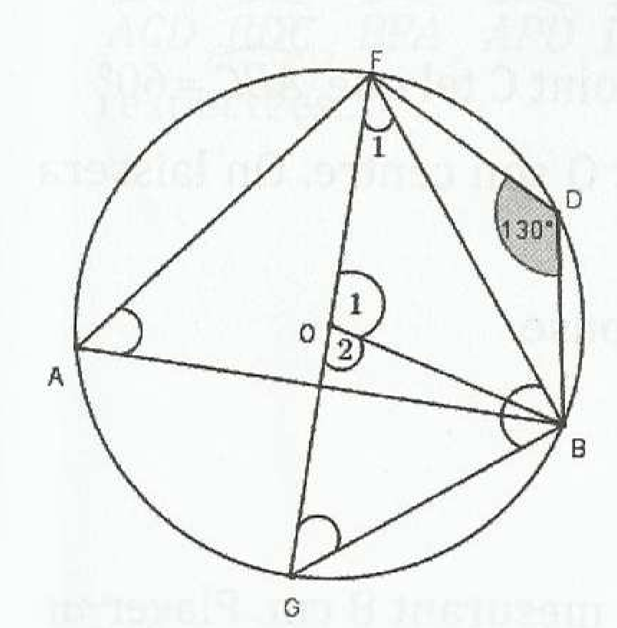


$\widehat{A} =$ ....

$\widehat{D} =$ ....

$\widehat{E} =$ ....

2) les points G et F sur la figure ci-dessous sont diamétralement opposés :



$\widehat{O_1}$ = ...

$\widehat{O_2}$ = ...

$\widehat{A}$ = ...

$\widehat{B}$ = ...

$\widehat{G}$ = ...

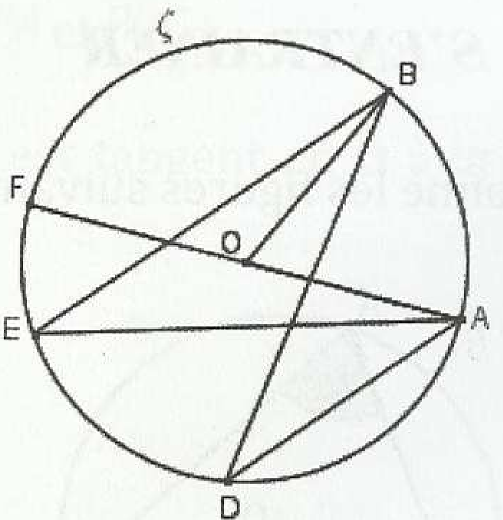
$\widehat{F}$ = ...



APPLIQUER

ζ est un cercle de centre O. sachant que $\widehat{AOB}$ =70°. Sans rapporteur, donner la mesure de chacun des angles suivants,

$\widehat{ADB}$ $\widehat{AEB}$; $\widehat{ABO}$; $\widehat{BAF}$; $\widehat{BOF}$





APPLIQUER

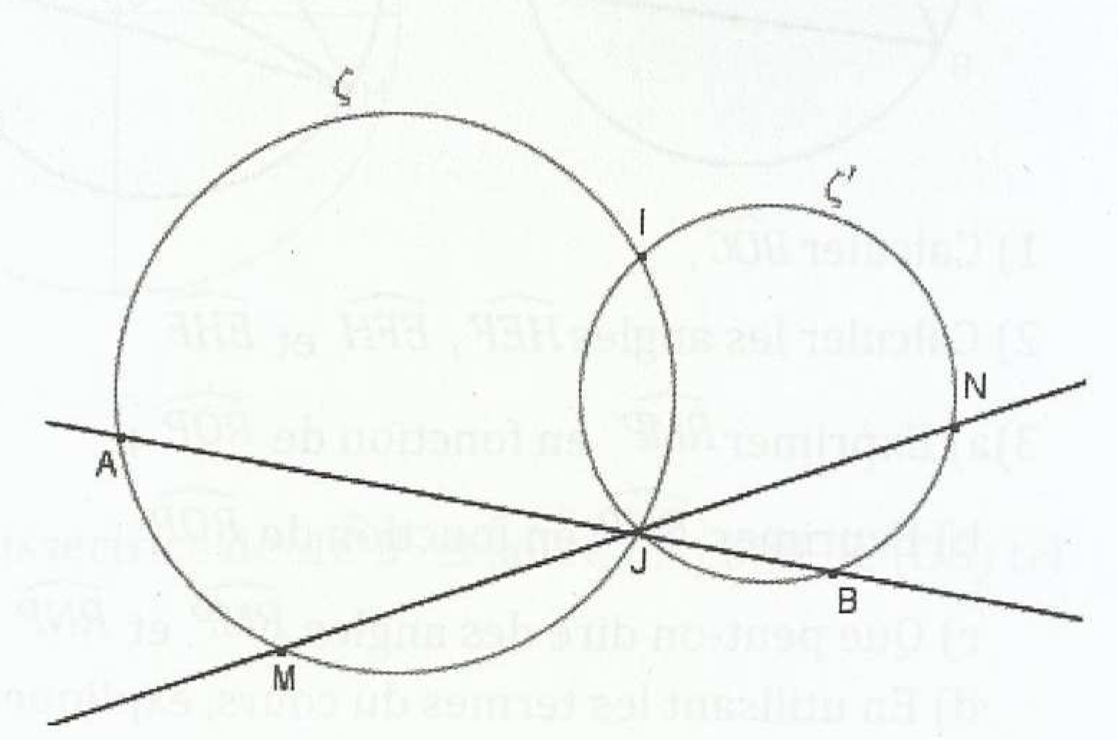
Dans la figure ci-contre, les deux cercles (ζ) et (ζ') sont sécantes en I et J.

1) Démontre que :

a) $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$;

b) $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$

2) En déduire que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$





6 APPLIQUER

1) Tracer le segment $[AB]$ tel que AB=7 cm. Placer un point C tel que $\widehat{ABC}=60°$

2) Construire le cercle circonscrit au triangle ABC, soit O son centre. On laissera les traits de construction.

3) Donner la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ en justifiant la réponse.



7 S'ENTRAINER

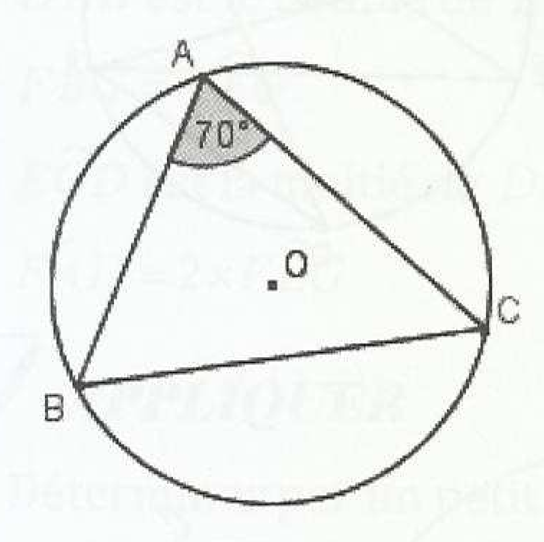
1) Tracer un cercle *(C)* de centre O et de diamètre [AB] mesurant 8 cm. Placer un point E sur ce cercle telque $\widehat{BAE}$ mesure 52°.

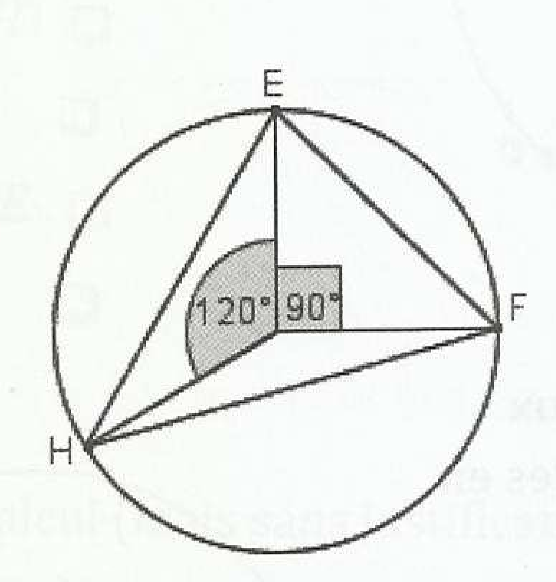
2) Montrer que le triangle AEB est rectangle.

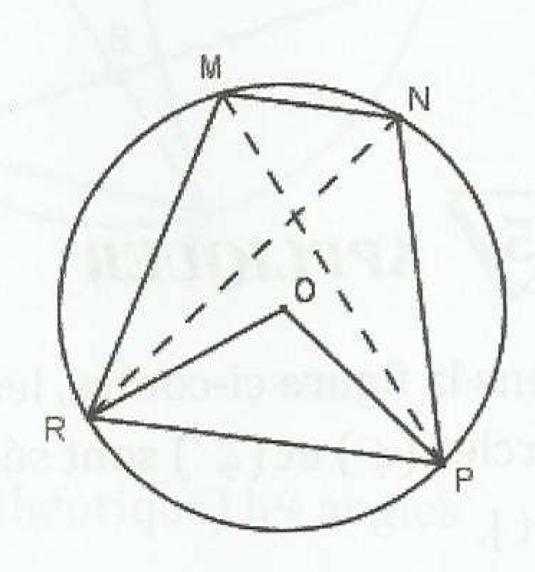
3) Sur le demi-cercle d'extrémités A et B, qui ne contient pas E, placer un point K. Quelle est la valeur exacte des angles $\widehat{EOB}$ et $\widehat{EKB}$? Justifier.

8 S'ENTRAINER

On donne les figures suivantes :







1) Calculer $B\hat{O}C$,

2) Calculer les angles $\widehat{HEF}$, $\widehat{EFH}$ et $\widehat{EHF}$

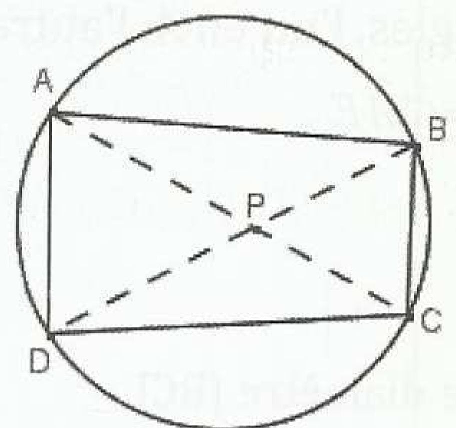
3)a) Exprimer $\widehat{RMP}$ en fonction de $\widehat{ROP}$;

b) Exprimer $\widehat{RNP}$ en fonction de $\widehat{ROP}$.

c) Que peut-on dire des angles $\widehat{RMP}$ et $\widehat{RNP}$?

d) En utilisant les termes du cours, expliquer dans quel cas deux angles inscrits dans le même cercle sont égaux

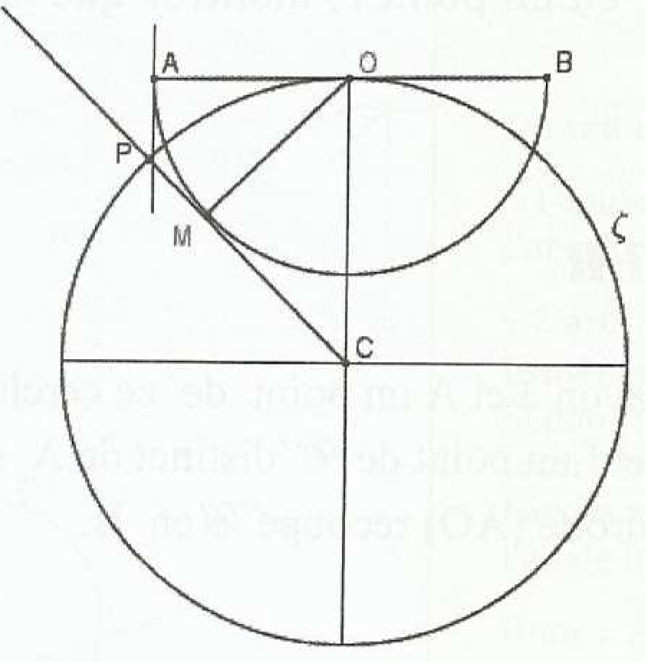
4) On donne $\widehat{ACD}=47°$, $\widehat{CAB}=28°$ et $\widehat{BAD}=62°$. En déduire les mesures des angles $\widehat{ACD}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{BPA}$, $\widehat{APD}$, $\widehat{DAP}$ et $\widehat{DBC}$ (les dimensions du dessin ne sont pas respectées..)



9 S'ENTRAINER

ζ est demi-cercle de centre O, de diamètre $[AB]$. M est un point de ce demi-cercle. La tangente en M à ζ coupe la tangente en A à ζ au point P et la médiatrice du segment $[AB]$ au point C.

1) a) Comparer les angles $\widehat{OPA}$ et $\widehat{OPC}$ puis les angles $\widehat{OPA}$ et $\widehat{POC}$.
   b) En déduire la nature du triangle OPC.
2) Démontrer que le cercle de centre C passant par P est tangent en O à la droite (AB)





10 SE PERFECTIONNER

Soit un triangle OAB et soit [Ox) la bissectrice de $A\hat{O}B$ et soit C un point de (OB) tel que OC = OA et $C \notin [OB)$

1) Montrer que $A\hat{C}O = x\hat{O}B$
2) Montrer que $(Ox)//(AC)$



11 SE PERFECTIONNER

ABC et EBC sont deux triangles rectangles, l'un en A, l'autre en E.

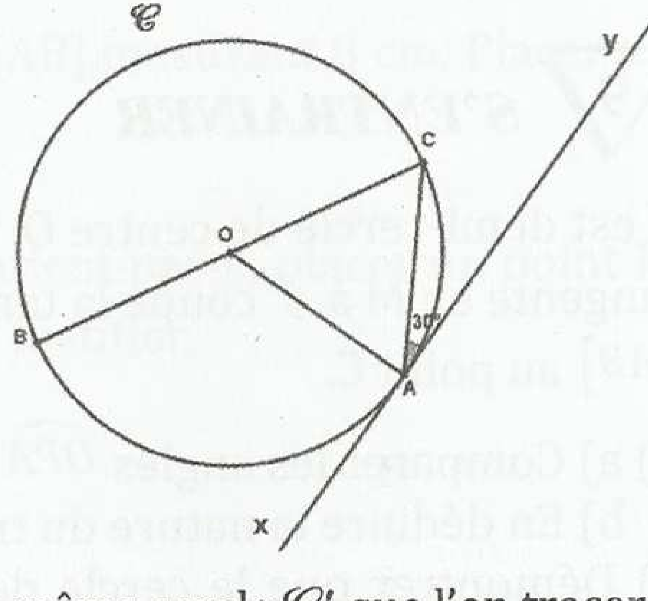
Démontrer que $A\widehat{B}C = A\widehat{E}C$ et $C\widehat{B}E = C\widehat{A}E$.



12 SE PERFECTIONNER

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre [BC] et de centre O.

Soient A un point de $\mathscr{C}$ et (xy) la tangente à c en A tel que $y\widehat{A}C = 30°$.



1) Calculer $A\widehat{B}C$ puis $A\widehat{O}C$ .Montrer que le triangle OAC est équilatéral.
2) La droite (BC) coupe (xy) en un point E.
Montrer que le triangle CAE est isocèle.
3) Soit [Ot) la bissectrice de l'angle $A\widehat{O}C$ et H le projeté orthogonal de E sur [Ot).
Montrer que les points O , A , H et E appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}'$ que l'on tracera.
4) La droite (AC) recoupe $\mathscr{C}'$ en un point F, montrer que les droites (OF) et (AE) sont parallèles.



13 SE PERFECTIONNER

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3 et A un point de ce cercle.
Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [OA]et I un point de $\mathscr{C}'$ distinct de A et O.
La droite (AI) recoupe $\mathscr{C}$ en J et la droite (AO) recoupe $\mathscr{C}$ en B.

1) Prouver que OAI est un triangle rectangle .
2) Montrer que les droites (OI) et (JB) sont parallèles.
3) Comparer alors $J\widehat{B}A$ et $I\widehat{O}A$



Soit L un point de l'arc [$\widehat{AB}$] de $\mathscr{C}$ ne contenant pas J. La droite (AL)recoupe $\mathscr{C}'$ en H.

a) Montrer que $A\widehat{H}I = A\widehat{L}J$.
b) En déduire que la droite (HI) et parallèle à la droite (LJ).



1 Q-C-M

1) $\widehat{EOF}$

2) $\widehat{EBF}$ et $\widehat{ECF}$

3) $\widehat{ECF}$, $\widehat{EAF}$ et $\widehat{CFO}$

4) (EF) et (CF) et (OA) et (OE)

2 VRAI-FAUX

2) 3) 5)



3 APPLIQUER

1) $\hat{A}=60°$; $\hat{B}=60°$; $\hat{E}=\frac{360-120}{2}=120°$

2) $\hat{O}_1=100°$; $\hat{O}_2=80°$; $\hat{A}=50°$; $\hat{B}=90°$;

$\hat{G}=50°$; $\hat{F}=40°$

4 APPLIQUER

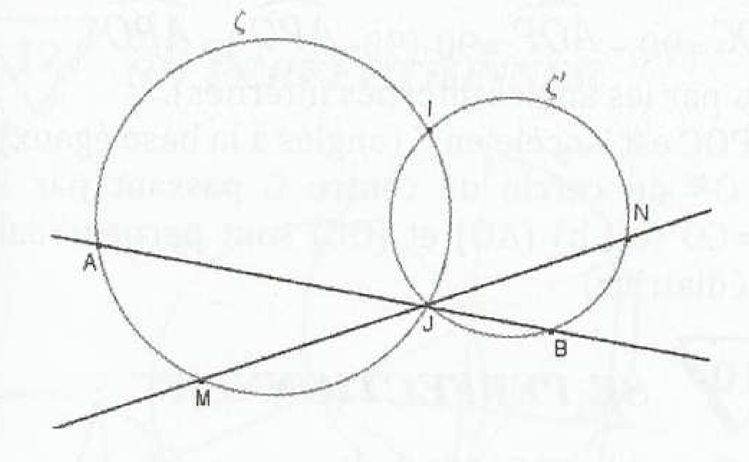
$\widehat{ADB}=\frac{70}{2}=35°$ $\widehat{AEB}=\frac{70}{2}=35°$;

$\widehat{ABO}=\frac{180-70}{2}=55°$;

$\widehat{BAF}=\frac{1}{2}\widehat{FOB}=\frac{110°}{2}=55°$;

$\widehat{BOF}=180°-70°=110°$

5 APPLIQUER



1.a) démontrons que $\widehat{IAJ}=\widehat{IMJ}$; l'angle $\widehat{AIJ}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte l'arc $\widehat{IJ}$. D'après la propriété : Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure. Donc $\widehat{IAJ}=\widehat{IMJ}$

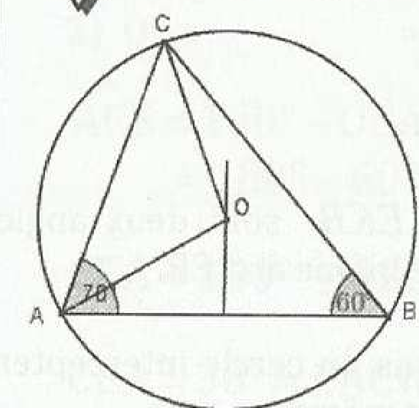
b) Démontrons que : $\widehat{IBJ}=\widehat{INJ}$.

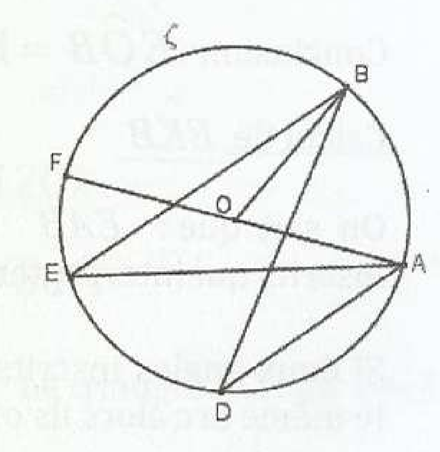
L'angle $\widehat{IBJ}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte l'arc $\widehat{IJ}$. D'après la propriété : Si deux angles dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure. Donc $\widehat{IBJ}=\widehat{INJ}$.

2)En déduire que $\widehat{AIB}=\widehat{MIN}$.

On a $\widehat{AIB}=180°-\left(\widehat{IAJ}+\widehat{IBJ}\right)$ Or d'après la question 1 $\widehat{IAJ}=\widehat{IMJ}$ et $\widehat{IBJ}=\widehat{INJ}$. Donc $\widehat{AIB}=180°-\left(\widehat{IMJ}+\widehat{INJ}\right)$. $\widehat{AIB}=\widehat{MIN}$

6 APPLIQUER





On sait que :

- l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc AC.

– L'arc $\widehat{AOC}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc AC.

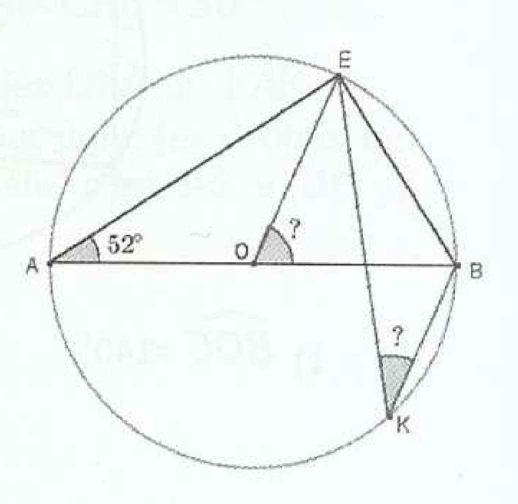
Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

Donc : $\widehat{AOC}=2\times\widehat{ABC}=2\times60°=120°$.

Conclusion : $\widehat{AOC}=120°$



7 S'ENTRAINER



2) On sait que :

- [AB] est un diamètre du cercle de centre O,
- E est un point de ce cercle.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.
Conclusion : AEB est un triangle rectangle en E

3) Calcul de $\hat{EOB}$

On sait que :

- L'angle $\hat{EOB}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc EB.

- L'angle $\hat{EAB}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc EB.

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

Donc : $\hat{EOB} = 2 \times \hat{EAB} = 2 \times 52° = 104°$

Conclusion : $\hat{EOB} = 104°$

Calcul de $\hat{EKB}$

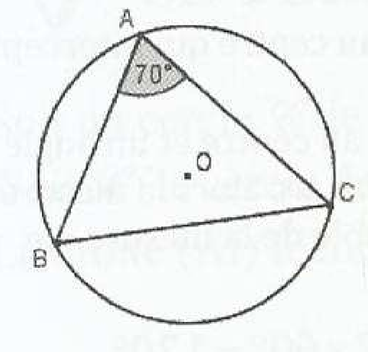
On sait que : $\hat{EAB}$ et $\hat{EKB}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc EB.

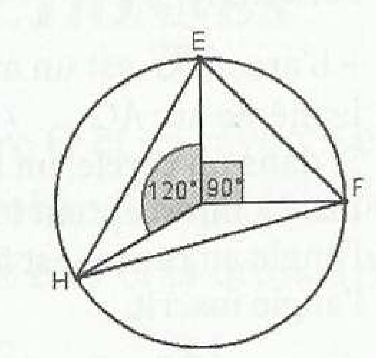
Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.

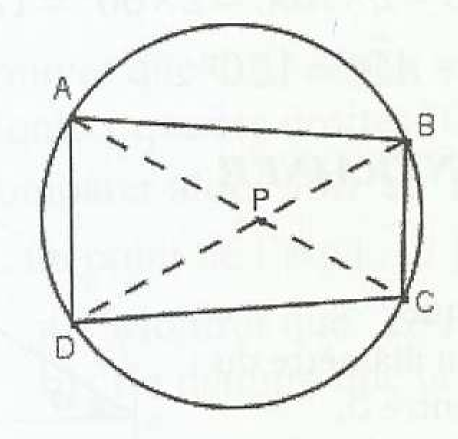
Donc $\hat{EAB} = \hat{EKB} = 52°$



S'ENTRAINER







1) $\widehat{BOC} = 140°$,

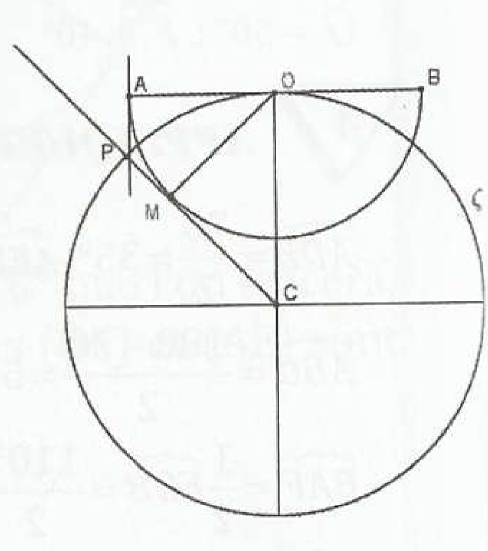
2) L'angle inscrit $\widehat{EFH}$ a pour angle au centre $\widehat{EOH}$. Donc $\widehat{EFH} = 120° \div 2 = 60°$ d'autre part, l'angle inscrit $\widehat{EHF}$ a pour angle au centre $\widehat{EOF}$. Donc $\widehat{EHF} = 90° \div 2 = 45°$. Dans le triangle EHF, $\widehat{HEF} = 180° - 60° - 45° = 75°$

3) $\widehat{RMP} = \widehat{ROP} \div 2 = \widehat{RNP}$. Deux angles sont égaux « lorsqu'ils interceptent le même arc » (ici $\widehat{RP}$)

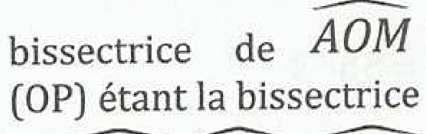
4) $\widehat{ABD} = 47°$; $\widehat{BDC} = 28°$, $\widehat{ACB} = 62°$; $\widehat{DPC} = 105°$; $\widehat{CPB} = 75°$; $\widehat{BPA} = 105°$. $\widehat{APD} = 75°$; $\widehat{DAP} = 43°$ et $\widehat{DBC} = 43°$



S'ENTRAINER



1)a) Dans les triangles OAP et OMP, OA=OM et le coté OP est en commun. Avec le théorème de Pythagore, on en déduit que AP=MP. Ceci veut dire donc que P est sur la bissectrice de $\widehat{AOM}$ (OP) étant la bissectrice de



$\widehat{AOM}$, $\widehat{AOP} = \widehat{MOP}$ et par conséquent, $\widehat{APO} = \widehat{MPO} = \widehat{CPO}$.

De plus

$\widehat{POC} = 90 - \widehat{AOP} = 90 - (90 - \widehat{APO}) = \widehat{APO}$

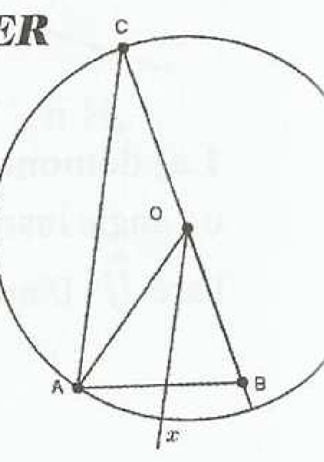
(ou par les angles alternes internes).

b) POC est isocèle en C (angles à la base égaux)

2) O $\in$ au cercle de centre C passant par P car CP=CO (cf1.b) (AO) et (OC) sont perpendiculaires (médiatrice)



SE PERFECTIONNER



1) On a OA = OC c'est-à-dire A et C sont situés sur la même cercle de centre O

$\hat{ACO}$ est un angle inscrit au cercle qui intercepte l'arc compris entre [CA] et [CB]

$A\hat{O}B$ est l'angle au centre associer à $A\hat{C}O$.

Donc $2A\hat{C}O = A\hat{O}B \Rightarrow A\hat{C}O = \frac{1}{2}A\hat{O}B = x\hat{O}B$

D'où lerésultat.

2) $A\hat{C}O$ et $x\hat{O}B$ deux angles correspondants, (CB) coupe (Ox) en O et (CA) en C d'après 1) on a

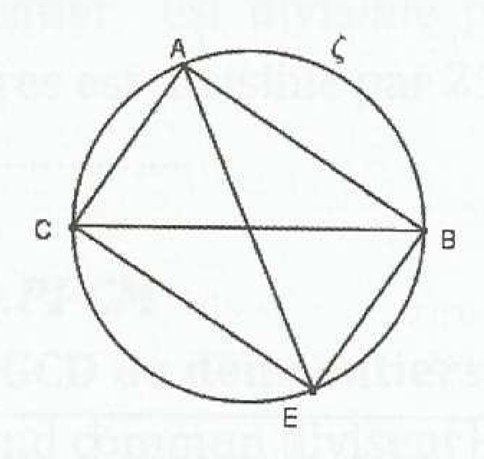
$A\hat{C}O = x\hat{O}B$ donc $(Ox)//(AC)$



11 SE PERFECTIONNER

Le triangle ABC est rectangle en A donc le milieu de [BC] est le centre du cercle circonscrit ζ à ABC.
Le triangle EBC est rectangle en E donc le milieu de [BC] est le centre du cercle circonscrit ζ' à EBC.
Le segment [BC] est un segment commun dans les deux triangles, donc ζ et ζ' sont confondus

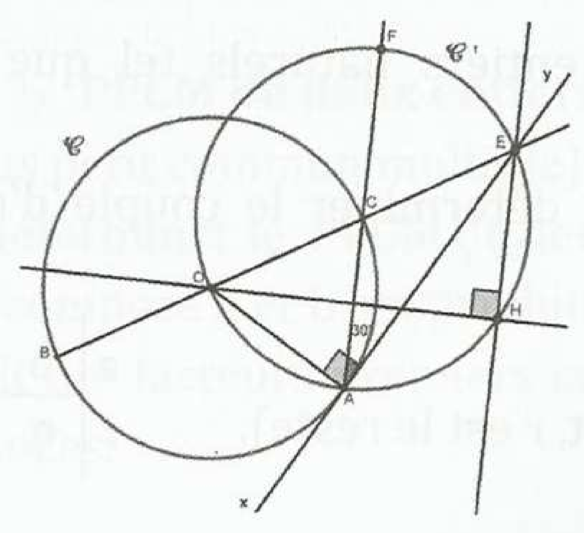
$A\hat{B}C$ et $C\hat{E}A$ deux angles inscrits dans le cercle qui interceptent le même arc [AC] d'où



$A\hat{B}C = A\hat{E}C$ .De même on a : $C\hat{B}E = C\hat{A}E$



12 SE PERFECTIONNER



1) Les angles $y\hat{A}C$ et $A\hat{B}C$ sont inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ qui intercepte le même arc $\left[\overset{\frown}{AC}\right]$ donc

$A\hat{B}C = y\hat{A}C = 30°$

L'angle $A\hat{B}C$ est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ qui intercepte l'arc $\left[\overset{\frown}{AC}\right]$ et l'angle $A\hat{O}C$ est un angle au centre qui intercepte le même arc $\left[\overset{\frown}{AC}\right]$

donc $A\hat{O}C = 2A\hat{B}C = 2\times30° = 60°$.

OA=OC (rayon de $\mathscr{C}$) donc le triangle OAC est isocèle or $A\hat{O}C = 60°$ d'où OAC est triangle équilatéral.

2) On a

$A\hat{C}E = 180° - O\hat{C}A$
$= 180° - 60° = 120°$

$C\hat{E}A = 180° - (120° + 30°)$

$C\hat{E}A = 30° = E\hat{A}C$ donc Le triangle ACE est isocèle en C.

3) (xy) la tangente à $\mathscr{C}$ en A donc (OA) $\perp$ (xy) sig (OA) $\perp$ (AE) donc le triangle OAE est rectangle en A. d'où O, A et E appartiennent au cercle de diamètre [OE]. (*)
On a OHE est un triangle rectangle en H d'où O, H et E appartiennent à un même cercle c' de diamètre [OE]. (**)
D'après (*) et (**) on a : O , A , H et E appartiennent à un même Cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [OE]

4) Les angles $O\hat{F}A$ et $E\hat{O}A$ sont inscrits dans le cercle $\mathscr{C}'$qui interceptent le même arc $\left[\overset{\frown}{AO}\right]$

Donc $O\hat{F}A = O\hat{E}A$ or $O\hat{E}A = C\hat{A}E = 30°$

D'où $O\hat{F}A = F\hat{A}E$. Les angles $O\hat{F}A$ et $F\hat{A}E$ sont alternes-internes égaux donc les droites qui les déterminent sont parallèles c'est-à-dire (OF) // (AE)

Activités numériques I

I) Résumé de cours

A) Ensembles de nombres :

- IN = {0,1,2,3,4,...} = l'ensemble des entiers naturels
- IN* ={1,2,3,4,...} = l'ensemble des entiers naturels non nuls
- ℤ = {....,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,....} = l'ensembles des entiers relatifs
- ℚ = l'ensemble des nombres rationnels
- Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$
- D = l'ensemble des décimaux
- Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$
- IR = l'ensemble des nombres réels
- On a : $IN \subset Z \subset D \subset Q \subset IR$

Remarques:

- Ecriture décimale d'un nombre décimal
- Exemple x = 5374179,459

millions	Centaines de milles	Dizaines de milles	milles	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	Dix-millièmes
5	3	7	4	1	7	9,	4	5	9	

(5374179,459=5 ×1000000+3×100000+7×10000+4×1000+1×100+7×10+9+4×0.1+5×0.01+9×0,001)

B) *Division euclidienne :* Soient a et b deux entiers naturels tel que b est différent de 0

Effectuer la division Euclidienne de a par b, c'est déterminer le couple d'entiers naturels (q, r) tels que $a = bq + r$ et $0 \le r < b$

(a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient, r est le reste).

a	b
r	q

C) Diviseur d'un entier naturel

Soient a et b deux entiers naturels tel que b est différent de 0.

b est un diviseur de a signifie $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ signifie il existe un entier naturel c tel que a = bc, dans ce cas on dit que a est un multiple de b

D) Critères de divisibilité :

- Un entier est divisible par 2 s'il est pair.
- Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un entier est divisible par 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 6 s' il est divisible par 2 et 3.
- Un entier est divisible par 8 si le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible 8.
- Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un entier est divisible par 10 si le chiffre des unités est 0.
- Un entier est divisible par 12 s'il est divisible par 3 et 4
- Un entier est divisible par 25 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25
- ....

E) PGCD.PPCM

PGCD de deux entiers naturels non nuls :

(le plus grand commun diviseur)
Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels a et b
On décompose a et b en produit des facteurs premiers, le PGCD de a et b est alors le produit de facteurs premiers communs affectés des plus petites puissances.

PPCM de deux entiers naturels :

(le plus petit commun multiple)
Pour déterminer le PPCM de deux entiers naturels a et b
On décompose a et b en produit des facteurs premiers, le PPCM de a et b est alors le produit de facteurs premiers communs et non communs affectés des plus grandes puissances.

Remarque : PPCM (a , b) × PGCD(a , b) = a b

Entiers naturels premiers entre eux :

Deux entiers naturels sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Fraction irréductible :Soient a et b deux entiers naturels.

$\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible si PGCD(a, b) = 1

(Autrement on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible si on ne peut pas la simplifier)

F) *Entier naturel premier*

Un entier naturel est premier s'il est différent de 1 et s'il possède exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

G) *Ecriture scientifique - Valeur approchée – arrondis :*

a) Ecriture scientifique d'un nombre décimal :

Définition : Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre décimal signifie l'écrire sous la forme $a\times10^n$ avec $n\in\mathbb{Z}$ et a est un décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemples :

Nombre (écriture décimale)	*Ecriture scientifique*
923,2531	$9{,}232531\times10^2$
0,0002537	$2{,}537\times10^{-4}$

b) Valeur approchée d'un réel :

Définition : $m\in IR$, $a\in D$, $n\in Z$

On a dit que a est une valeur approchée de m à 10^n prés si $|m-a|\leq10^n$

Remarque :

Une valeur approchée d'un réel à une précision donnée est obtenue en coupant l'écriture avec la virgule du nombre au rang voulu.

Exemples :Soit b = 4329,71592

- sa valeur approchée au dixième (0,1 prés) est 4329,7
- sa valeur approchée au centième (0,01 prés) est 4329,71
- sa valeur approchée au millième (0,001 prés) est 4329,715
- sa valeur approchée au dizaine (10 prés) est 4320

c) Arrondi d'un nombre réel:

Pour trouver l'arrondi d'un nombre à un rang donné , on conserve les chiffres de l'écriture décimale de ce nombre jusqu'au rang indiqué

❖ Si le chiffre d'après est inférieur ou égal à 4 alors l'arrondi est le nombre obtenu

❖ Si non on ajoute 1 au dernier chiffre conservé.

Exemples: A = 4329,71592

- son arrondi à 0,1 près est 4329,7
- son arrondi à 0,01 près est 4329,72
- son arrondi à 0,001 près est 4329,716
- son arrondi à 10 prés est 4330
- son arrondi à 100 prés est 4300

II) Exercices

1 Q-C-M

1) Parmi les 3 phrases suivantes, l'une est fausse. Laquelle ?
a) 111 est divisible par 11 ❑
b) 525 est divisible par 3 ❑
c) 161 est divisible par 7 ❑

2) Quel est le nombre qui n'est pas un multiple de 3 ?
a) 113 ❑
b) 111117 ❑
c) 3021 ❑

3) 15 est un diviseur de l'un des 3 nombres suivants. Lequel ?
a) 420 ❑
b) 5 ❑
c) 215 ❑

4) Parmi les trois nombres suivants, lequel n'est pas un nombre premier ?
a) 49 ❑
b) 29 ❑
c) 59 ❑

5) Combien y a-t-il de nombres premiers qui sont divisibles par 3 ?
a) Une infinité ❑
b) Un seul ❑
c) Aucun ❑

6) Quelle est la décomposition en produit de facteurs premiers de 18 ?
a) 2×3^2 ❑
b) 3×6 ❑
c) $11 + 7$ ❑

7) 3×5^2 est la décomposition en produit de facteurs premiers de :

a) 225 ❑
b) 30 ❑
c) 75 ❑

8) Quelle est la décomposition en produit de facteurs premiers de 200 ?

a) $2^3 \times 5^2$ ❑
b) $2^3 \times 2^5$ ❑
c) 2×10^2 ❑



2 VRAI-FAUX

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

1) Le nombre 55662852456 est divisible par 36
2) PGCD (336,30) =6
3) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier
4) 1525,456 est l'arrondi de 1525,4569 à 0.001 près.
5) Il existe seulement 5 entiers naturels n tel que le nombre $N = 5 - \frac{n}{6}$ soit un entier naturel
6) Soit a et b deux entiers naturels tels que a = 12 b + 10, le reste de la division euclidienne de a par 6 est 4.



3 VRAI-FAUX

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant :

1) Le nombre 52117052450 est divisible par 15
2) La fraction $\frac{630}{84}$ est un nombre décimal.
3) $7{,}325024 \times 10^{-4}$ est la notation scientifique de 73250,24.
Si n est un entier naturel pair alors n^2 est pair.
4) Si a et b sont deux entiers naturels non nuls premiers entres eux alors PPCM(a,b)= ab
5) Soit x et y deux entiers naturels tels que x = 11 y +17 le quotient de la division Euclidienne de x par 11 est y.

- ***Division Euclidienne:***



4 APPLIQUER

1) Dans une division euclidienne le dividende est 524 ; le quotient est 30 et le reste est 14. Quel est le diviseur ?

2) Dans une division euclidienne le diviseur est 15,le quotient est 22 et le reste est 4. Quel est le dividende ?



APPLIQUER

Dans une bibliothèque, il ya 1460 livres qu'il faut ranger sur des étagères contenant 32 livres chacune.
Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?



APPLIQUER

Soit n un entier naturel et soit $x = 8n + 13$
1) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de x par 8
2) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de x par 4



APPLIQUER

En faisant la division euclidienne d'un entier naturel n par 23, on trouve un quotient égal à q et un reste égale à 5 .En divisant n par 21, on trouve le même quotient q et un reste égal à 17.Trouver n.



APPLIQUER

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de : $2n + 9$ par $n + 2$.

- ***Diviseur d'un entier naturel***



S'ENTRAINER

Pour chaque question donner toutes les possibilités.
1) Déterminer le chiffre x pour que l'entier 573x soit divisible par 5
2) Déterminer le chiffre x pour que l'entier 596x soit divisible par 6
3) Déterminer le chiffre x pour que l'entier 523x2 soit divisible par 4
4) Déterminer le chiffre x pour que l'entier 523x2 soit divisible par 8



S'ENTRAINER

Pour chaque question donner tous les cas possibles.
1) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 5x3y soit divisible par 15
2) Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier 5x3y soit divisible par 12



S'ENTRAINER

Dans chaque cas trouver les entiers naturels n pour que

1) $\frac{12}{n} \in IN$ 2) $\frac{n}{12} \in IN$ 3) $\frac{8}{n+3} \in$ IN 4) $\frac{n}{12} \in IN$ et $\frac{48}{n} \in IN$



SE PERFECTIONNER

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{5n+11}{n+1} = 5 + \frac{6}{n+1}$

b) En déduire les entiers naturels n pour que $\frac{5n+11}{n+1} \in$ IN

2) Dans chaque cas trouver les entiers naturels n pour que

a) $\frac{7n+12}{n+1} \in$ IN b) $\frac{2n+12}{2n+1} \in IN$.



SE PERFECTIONNER

1) Montrer que la somme de 3 entiers naturels consécutifs est un entier naturel divisible par 3.

2) Montrer que le produit de 3 entiers naturels pairs est divisible par 8.



SE PERFECTIONNER

1) Montrer que si a est impair alors a^2 est impair.

2) Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4



SE PERFECTIONNER

1) Montrer qu'un nombre x qui s'écrit aaa où a est entier non nul est un nombre divisible par 37(a représente le chiffre des centaines, de dizaines et des unités de x)

2) Deux entiers naturels a et b ont 7 comme diviseur commun leur produit est égal à 3185. Quels sont ces deux nombres ? Donner toutes les solutions possibles.

- ***Nombres premiers –PGCD-PPCM***

16

APPLIQUER

Soit les entiers $x = 2^4 \times 3^2 \times 5$ $y = 2^2 \times 3^3 \times 7$ z = $2^2 \times 7 \times 11$

Déterminer PGCD(x,y) , PPCM(x,y) ,PGCD(x,y,z) et PPCM(x,y,z).





APPLIQUER

1) Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
2) Calculer le plus grand diviseur commun de 682 et 352.
3) Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.



APPLIQUER

Un monsieur veut faire le dallage de son terrain de forme rectangulaire de longueur 336 m et de largeur 180 m, en utilisant des dalles carrées isométriques de côté un entier naturel(en mètres)
Trouver le côté d'une dalle sachant que le monsieur veut utiliser le plus petit nombre des dalles.



APPLIQUER

Un épicier dispose de 1575 bonbons et 540 pièces de chocolat.
Il veut les mettre dans des sachets de sorte que tous les sachets contiennent le même nombre de bonbons et le même nombre de chocolat.
Déterminer le nombre maximum de sachets qu'il peut ainsi préparer.



S'ENTRAINER

Dans un port marin, trois projecteurs situés au-dessus d'un phare commencent simultanément à envoyer des signaux lumineux. Le 1er envoie son signal toutes les 15 secondes. Le 2ème l'envoie toutes les 35 secondes et le 3ème l'envoie toutes les 20 secondes.
Après combien de secondes les trois signaux seront envoyés à nouveau ensemble ?



S'ENTRAINER

1) Déterminer PPCM(70,42) et PGCD(70,42).
2) [AB] et [CD] son deux segments tels que AB = 70 et CD= 42
On veut partager chacun des segments [AB] et [CD] en plusieurs segments isométriques de longueur ℓ
Déterminer ℓ pour que le nombre total des petits segments soit minimal.

22
S'ENTRAINER

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que: $\frac{n+10}{180}$ et $\frac{n+10}{525}$ soient deux entiers naturels



23 S'ENTRAINER

Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070



24 S'ENTRAINER

Lorsque je divise 134 par ce nombre le reste est 2 et lorsque je divise 183 par ce même nombre, Le reste est 3.
Quel est peut-être ce nombre ? Trouver toutes les solutions.



25 S'ENTRAINER

Déterminer par la méthode d'algorithme d'Euclide le plus grand commun diviseur de :
1)1224 et 462
2) 4860 et 1512



26 SE PERFECTIONNER

Soit n un entier naturel tel que PGCD (5n+2 , 120) = 12 et PPCM (5n +2 , 120) = 2520
Calculer n.



27 SE PERFECTIONNER

1) a) Calculer PPCM(32,56)
   b) En déduire PGCD(32,56)
   c) Donner alors la liste des diviseurs communs de 32 et 56.
2) Deux bus partent en même temps d'une station à 7h. Le premier fait son circuit à 32 mn et le second en 56 mn
   a) A quelle heure aura lieu la première rencontre dans la station ?
   b) Le service s'arrête à 22h ; préciser l'horaire des autres rencontres.



28 SE PERFECTIONNER

Un fleuriste possède 135 roses blanches, 120 rouges et 90 jaunes
Il veut former des bouquets qui contiennent le même nombre de chaque type des fleurs
Déterminer le nombre maximum de bouquets qu'il peut ainsi former et la Composition des bouquets



SE PERFECTIONNER

1) Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24.
Déterminer tous les couples (a, b) possibles.
2) Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels $x+y=96$ et pgcd$(x\,;y)=4$.

- ***Valeur approchée – Arrondis***



APPLIQUER

Pour chacun des nombres ci-dessous, donner son écriture scientifique.
a = 224,5 b $=573{,}3\times10^{-5}$ c = 5425,331 d = 0,000715 e $=0{,}00247\times10^{8}$



APPLIQUER

Compléter le tableau suivant :

	Nombre $\frac{637}{17}\simeq$				
	à 10 prés	***à l'unité (1 prés)***	***au dixième (0,1près)***	***au centième (0,01 prés)***	***au millième (0.001près)***
Valeur approchée					
arrondi					



APPLIQUER

Compléter le tableau suivant :

	Nombre $\pi^2\simeq$			
	Au dizaine (1 près)	***au dixième (0,1près)***	***au centième (0,01 prés)***	***au millième (0.001près)***
Valeur approchée				
arrondi				

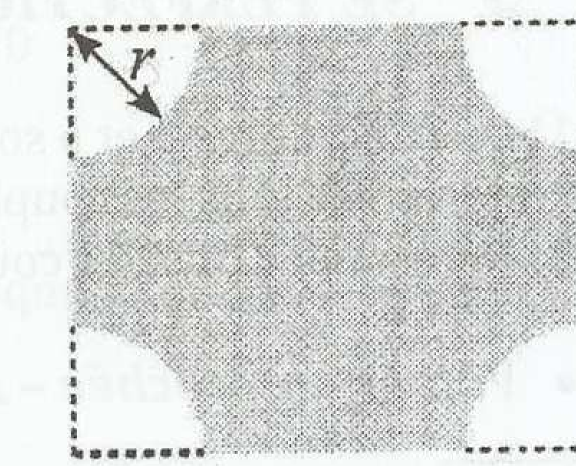


S'ENTRAINER

B $=\dfrac{6\times10^{-7}\times150\times10^{20}}{8\times\left(10^{2}\right)^{4}}$ .Déterminer l'écriture scientifique de B.



SE PERFECTIONNER

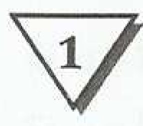


Dans des plaques rectangulaires de cuivre (de 20 cm et 23 cm)

Une machine usine quatre quarts de cercles de rayon r cm. C'est l'outilleur qui choisit la valeur de r en réglant la machine.

1) Déterminer l'aire A de la plaque obtenue

2) Déterminer une valeur approchée à 0,01 prés de A lorsque r = 2cm.



Q-C-M

1°) a) ; 2°) a) ; 3°) a) ; 4°) a) ; 5°) b) ; 6°) a) ; 7°) c) ; 8°) a)



VRAI-FAUX

1) Vrai car il est divisible par 4 et 9
2) Vrai
336 $=2^4\times3\times7$, $30=2\times3\times5$ alors PGCD $(336,30)=2\times3=6$
3) Faux : contre exemple 3 + 7 = 10 n'est pas premier
4) Faux car l'arrondi est 1525,457
5) Faux $N=5-\frac{n}{6}$ est un entier naturel si n est un multiple de 6 et $5-\frac{n}{6}\geq 0$

Si n est un multiple de 6 et $5\geq\frac{n}{6}$

Si n est un multiple de 6 et $n\leq 30$

D'où $n\in\{0,6,12,18,24,30\}$

Donc il existe 6 entiers naturels tels que $N=5-\frac{n}{6}$ soit un entier naturel

6) Vrai
$a=12b+10=6\times2b+6+4=6(2b+1)+4$ d'où n = 4



VRAI-FAUX

1) Faux : la somme de chiffres de N est égal à 32 n'est pas divisible par 3
Alors N n'est pas divisible par 3
Alors N n'est pas divisible par 15

2) $\frac{630}{84}=7,5=\frac{75}{10}$ alors c'est un décimal

3) Faux : la notation scientifique est $7,325024\,.10^4$

4) Vrai : si n est pair il existe $n'\in\mathbb{N}$ tel que $n=2n'$ alors $n^2=(2n')^2=4n'^2=2\underbrace{(2n'^2)}_{\in\mathbb{N}}$

Alors n^2 est pair

5) Si a et b sont premiers entre eux alors PGCD(a,b)= 1 or $PPCM(a,b)\times PGCD(a,b)=ab$ alors $PPCM(a,b)=ab$

3) Faux :
$x=11y+17=11y+11+6=11(y+1)+6\,(0\leq 6<11)$.

Le quotient est $y+1$

I. Division Euclidienne :



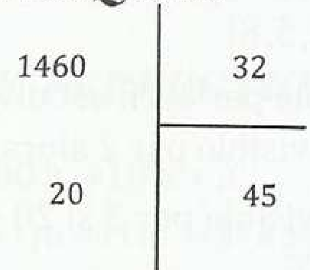
APPLIQUER

1) Soit d le diviseur : On a : $524=30\times d+14$ alors $30\,d=510$ alors $d=\frac{510}{30}=17$

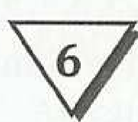
2) Soit x le dividende on a : $x=15\times22+4=334$



APPLIQUER



La division euclidienne de 1460 par 32 est $1460=32\times45+20$
Donc il ya 45 étagères complètes et une étagère incomplète contenant 20 livres.
Conclusion : il faut 46 étagères.



APPLIQUER

1) Il suffit d'écrire x sous la forme x= 8 q + r avec $0\leq q<8$

On a : $x=8n+13=8n+8+5=8\underbrace{(n+1)}_{q}+\underbrace{5}_{r}$

Le quotient est q= n +1 et le reste est r = 5

2/ Il suffit d'écrire x sous la forme $x=4q'+r'$ avec $0\leq r'<4$

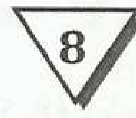
On a : $x=8n+13=4\times2n+4\times3+1=4\underbrace{(2n+3)}_{q'}+\underbrace{1}_{r'}$

Le quotient est $q'=2n+3$ et le reste est $r'=1$



APPLIQUER

On a : $n=23q+5$ et $n=21q+17$
Alors $23q+5=21q+17$
Alors $23q-21q=17-5$ Alors $2q=12$
Alors $q=6$
D'où $n=23\times6+5=143$



APPLIQUER

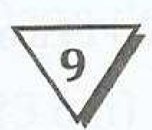
Il faut écrire $2n+9$ sous la forme $2n+9=(n+2)q+r$ avec $0\leq r<n+2$.

On a : $2n+9=2(n+2)+5$

On a : $n\geq 4$ alors $n+2\geq 6$ alors $5<n+2$

D'où le quotient est q=2 et r =5

II. Diviseur d'un entier naturel :



9 S'ENTRAINER

1) 573x est divisible par 5 si $x\in\{0,5\}$

2)72 x4 est divisible par 3 si la somme de ces chiffres qui est 13+ x est divisible par 3. Or x est un chiffre alors $x\in\{2,5,8\}$

3)596 x est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

- 596 x est divisible par 2 alors $x\in\{0,2,4,6,8\}$
- 596x est divisible par 3 si 20 + x est divisible par 3.

D'où 596 x est divisible par 2 et 3 si $x\in\{0,2,4,6,8\}$ et 20 + x est divisible par 3.

D'où 596 x est divisible par 2 et 3 si x = 4

4) Le nombre 523 x 2 est divisible par 4 si le nombre x2 est divisible par 4 d'où $x\in\{1,3,5,7,9\}$

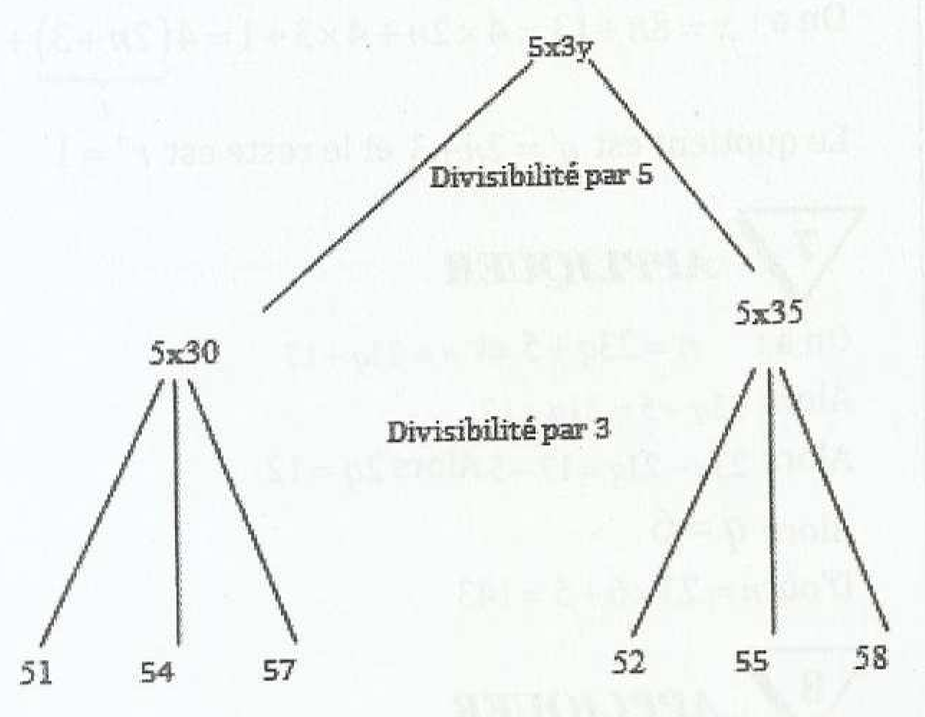
5) Le nombre 523x2 est divisible par 8 si le nombre 3x2 est divisible par 8 d'où $x\in\{1,5,9\}$.



10 S'ENTRAINER

1) 5x3y est divisible par 15 s'il est divisible par 3 et 5.

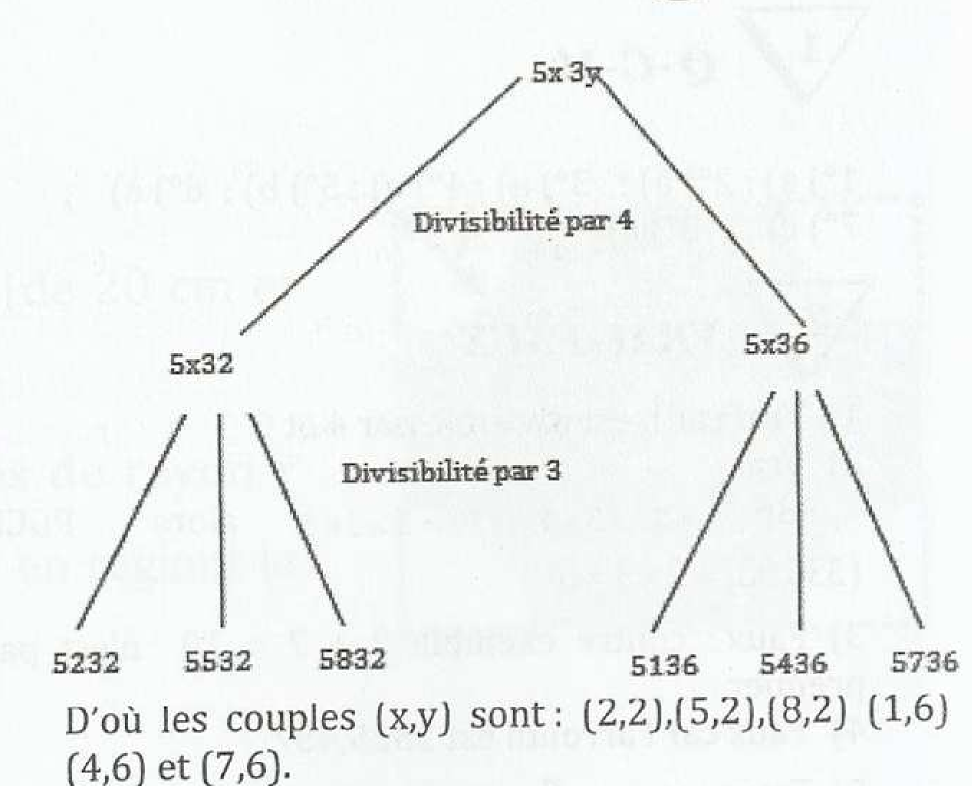
On cherche x et y en utilisant l'arbre de choix suivant :



D'où $(x,y)\in\{(1,0);(4,0);(7,0);(2,5);(5,5);(8,5)\}$

2) 5x3y est divisible par 12 s'il est divisible par 3 et 4

On a 5x3y est divisible par 4 si le nombre 3y est divisible par 4.



D'où les couples (x,y) sont : (2,2),(5,2),(8,2) (1,6) (4,6) et (7,6).

11 S'ENTRAINER

1) $\frac{12}{n}\in\mathbb{N}$ signifie n est un diviseur de 12

signifie $n\in\{1,2,3,4,6,12\}$

2) $\frac{n}{12}\in\mathbb{N}$ signifie n est un multiple de 12

signifie $n\in\{0,12,24,36,....\}$

3) $\frac{8}{n+3}\in\mathbb{N}$

signifie n + 3 est un diviseur de 8.

signifie $n+3\in\{1,2,4,8\}$

*si n + 3 = 1 signifie n = -2 impossible car $n\in IN$.

*si n + 3 = 2 signifie n = -1 impossible car $n\in IN$.

*si n + 3 = 4 signifie n = 1

* si n + 3 = 8 signifie n = 5

D'où $n\in\{1,5\}$

4) $\frac{n}{12}\in\mathbb{N}$ et $\frac{48}{n}\in\mathbb{N}$

Signifie n est un multiple de 12 et n est un diviseur de 48 Signifie $n\in\{12,24,48\}$

12 SE PERFECTIONNER

1)a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5+\frac{6}{n+1}=\frac{5(n+1)+6}{n+1}=\frac{5n+11}{n+1}$

b) On a $\frac{5n+11}{n+1}\in\mathbb{N}$ si $5+\frac{6}{n+1}\in\mathbb{N}$

Si $\frac{6}{n+1}\in\mathbb{N}$

Si $n+1$ est un diviseur de 6.

Si $n+1 \in \{1,2,3,6\}$

Si $n \in \{0,1,2,5\}$

2) a) $\frac{7n+12}{n+1} = \frac{7(n+1)+5}{n+1} = \frac{7(n+1)}{n+1} + \frac{5}{n+1} = 7 + \frac{5}{n+1}$

On a $\frac{7n+12}{n+1} \in \mathbb{N}$ si $7 + \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$

Signifie $\frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$ Signifie $n+1$ est un diviseur de 5

Signifie $n+1=1$ ou $n+1=5$ Signifie $n=0$ ou $n=4$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+12}{2n+1} = \frac{(2n+1)+11}{2n+1}$

$= \frac{2n+1}{2n+1} + \frac{11}{2n+1} = 1 + \frac{11}{2n+1}$

D'où $\frac{2n+12}{2n+1} \in \mathbb{N}$ si $\frac{11}{2n+1} \in \mathbb{N}$

Si $2n+1$ est un diviseur de 11

Si $2n+1=1$ ou $2n+1=11$

Si $n=0$ ou $n=5$



13 SE PERFECTIONNER

1) Soit x, y et z trois entiers naturels consécutifs

On a : $x+y+z = x+(x+1)+(x+2) = 3x+3 = 3\underbrace{(x+1)}_{\in IN}$

Alors $x+y+z$ est un multiple de 3.

Alors $x+y+z$ est divisible par 3.

2) Soit x, y et z trois entiers pairs

* x est pair signifie il existe $x' \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2x'$.

*y est pair signifie il existe $y' \in \mathbb{N}$ tel que $y = 2y'$

*z est pair signifie il existe $z' \in \mathbb{N}$ tel que $z = 2z'$

On a : $xyz = (2x')(2y')(2z') = 8\underbrace{(x'y'z')}_{\in \mathbb{N}}$

D'où xyz est un multiple de 8.

D'où xyz est divisible par 8.



14 SE PERFECTIONNER

1) On a a est impair signifie il existe $a' \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2a'+1$

D'où $a^2 = (2a'+1)^2 = (2a')^2 + 2(2a') + 1 = 4a'^2 + 4a' + 1$

Alors $a^2 = 2\underbrace{(2a'^2 + 2a')}_{\in \mathbb{N}} + 1$

D'où a^2 est impair

2) Soit a et b deux entiers naturels impairs consécutifs.

* a et impair signifie il existe $a' \in \mathbb{N}$, tel que $a = 2a'+1$

* a et b deux entiers naturels impairs consécutifs alors $b = a+2 = (2a'+1)+2 = 2a'+3$

D'où: $a+b = (2a'+1)+(2a'+3) = 4a'+4 = 4\underbrace{(a'+1)}_{\in IN}$

D'où a + b est un multiple de 4.



15 SE PERFECTIONNER

1) aaa = 100 a +10 a + a

$=(100+10+1)a = 111a = 37 \times \underbrace{3a}_{\in \mathbb{N}}$

D'où le nombre aaa est divisible par 37.

2) $a = 7a'$, $b = 7b'$

On a $ab = 3185$ alors $7a' \times 7b' = 3185$

Alors $a'b' = 65$

Alors $a'b' = 5 \times 13$

Alors $(a',b') \in \{(5,13),(13,5),(1,65),(65,1)\}$

Alors $(a,b) \in \{(35,91),(91,35);(7,455),(455,7)\}$

Nombres premiers -PGCD-PPCM



16 APPLIQUER

$PGCD(x,y) = 2^2 \times 3^2 = 36$

$PPCM(x,y) = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 15120$

$PGCD(x,y,z) = 2^2 \times 3^2 = 36$

$PPCM(x,y,z) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 166320$



17 APPLIQUER

1) 2 est un diviseur commun de 682 et 352 alors 682 et 352 ne sont pas premiers entre eux

2) $682 = 2 \times 11 \times 31$ et $352 = 2^5 \times 11$

alors PGCD(682,352)=2 × 11= 22

3) $\frac{682}{352} = \frac{682:22}{352:22} = \frac{31}{16}$



18 APPLIQUER

1) Soit x le côté d'une dalle.

On a x est un diviseur commun de 180 et 336.

Le monsieur veut utiliser le plus petit nombre de dalles.Donc il faut que x soit le plus grand côté possible.

D'où $x = PGCD(180,336)$.

On a : $336 = 2^4 \times 3 \times 7$ et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

D'où $x = 2^2 \times 3 = 12$ m

2) On a : $336 = 12 \times 28$ et $180 = 12 \times 15$

Le nombre de dalles est égal à $28 \times 15 = 420$



APPLIQUER

Soit x le nombre de sachets

On a x est un diviseur commun de 1575 et 540.

On a x est le nombre maximum de sachets qu'il peut préparer

Alors x= $PGCD(1575,540)$

On a : $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

D'où $x = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$



S'ENTRAINER

Soit x le temps en seconde après lequel les trois signaux seront envoyés à nouveau ensemble.

On a x est un multiple commun de 15, 35 et 20

Alors $x = PPCM(15,35,20)$

On a : $15 = 3 \times 5$; $35 = 5 \times 7$; $20 = 2^2 \times 5$

Alors $x = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ s



S'ENTRAINER

1) On a : $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$

2) On a ℓ est un diviseur commun de 70 et 42. Pour que le nombre total des petits segments soit minimal, il faut que ℓ soit le plus grand possible.

D'où $\ell = PGCD(70,42) = 14$



S'ENTRAINER

Pour que $\frac{n+10}{180}$ et $\frac{n+10}{525}$ soient deux entiers naturels. Il faut que n+10 soit un multiple commun de 180 et 525

On a n est le plus petit entier naturel tel que $\frac{n+10}{18}$ et $\frac{n+10}{525}$ soient deux entiers naturels alors

$n+10 = PPCM(180,525)$

On a $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $525 = 3 \times 7 \times 5^2$

D'où $n+10 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6300$

D'où $n = 6290$



S'ENTRAINER

Les diviseurs communs de 375 et 2070 sont les diviseurs de PGCD(375,2070)

On a : $375 = 3 \times 5^3$ et $2070 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 23$

D'où PGCD(375,2070) = 3 × 5 = 15

L'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1,3,5,15\}$ alors l'ensemble des diviseurs communs de 375 et 2070 est $\{1,3,5,15\}$.



S'ENTRAINER

Soit n ce nombre on a $n \geq 4$.

On a : n divise 134 – 2 = 132

n divise 183 -3 = 180

Alors n est un diviseur commun de 132 et 180.

Alors n est un diviseur de PGCD(132,180).

On a $132 = 2^2 \times 3 \times 11$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Alors $PGCD(132,180) = 2^2 \times 3 = 12$

Alors n divise 12

Alors $n \in \{1,2,3,4,12\}$

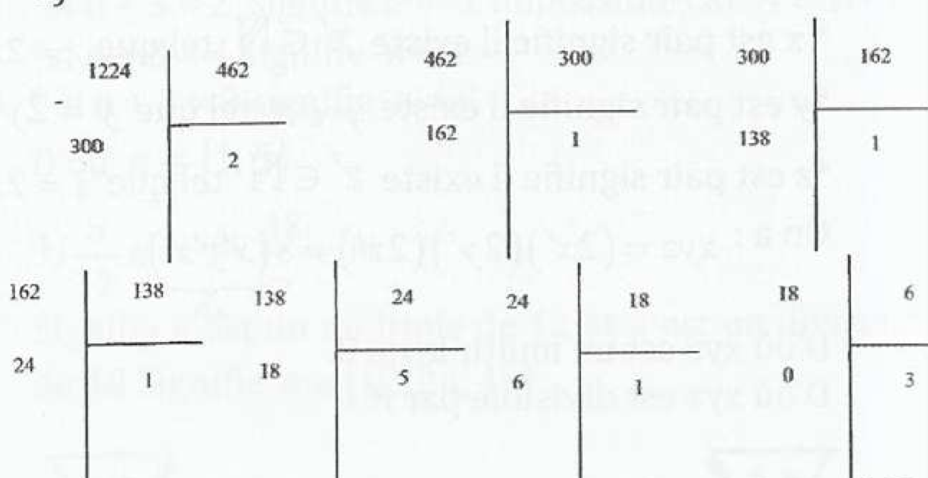
__Conclusion__ : on a $n \geq 4$ et $n \in \{1,2,3,4,12\}$

Alors $n = 4$ ou $n = 12$



S'ENTRAINER

1)



On effectue la division euclidienne de 1224 par 462 on obtient $1224 = 462 \times 2 + 300$

On effectue la division euclidienne de 462 par 300 on obtient $462 = 300 \times 1 + 162$

On effectue la division euclidienne de 300 par 162 on obtient $300 = 1 \times 162 + 138$

On effectue la division euclidienne de 162 par 138 on obtient $162 = 138 \times 1 + 24$

On effectue la division euclidienne de 138 par 24 on obtient $138 = 24 \times 5 + 18$

On effectue la division euclidienne de 24 par 18 on obtient $24 = 18 \times 1 + \boxed{6}$

On effectue la division euclidienne de 138 par 24 on obtient $18 = 6 \times 3 + 0$

On a le $PGCD(1224, 462)$ et le dernier reste non nul alors $PGCD(1224, 462) = 6$

2)on effectue la division euclidienne de 4860 par 1512 on obtient $4860 = 1512 \times 3 + 324$

On effectue la division euclidienne de1512 par 324 on obtient $1512 = 4 \times 324 + 216$

On effectue la division euclidienne de 324 par 216 on obtient $324 = 1 \times 216 + \boxed{108}$

On effectue la division euclidienne de 216 par 108 on obtient $216 = 2 \times 108 + 0$

On a le $PGCD(4860, 1512)$ et le dernier reste non nul alors $PGCD(4860, 1512) = 108$



26 SE PERFECTIONNER

On a :

$PGCD(5n+2, 120) \times PPCM(5n+2, 120)$

$= (5n+2) \times 120$

Alors $12 \times 2520 = (5n+2) \times 120$

Alors $5n+2 = \dfrac{2520 \times 12}{120}$

Alors $5n + 2 = 252$

Alors $n = 50$



27 SE PERFECTIONNER

1) a) on a : $32 = 2^5$ et $56 = 2^3 \times 7$

$PPCM(32, 56) = 2^5 \times 7 = 224$

b) $PGCD(32, 56) = 2^3 = 8$

Les diviseurs communs de 32 et 56 sont le diviseur de $PGCD(32, 56) = 8$

C'est-à-dire $\{1, 2, 4, 3\}$

2)a) $PPCM(32, 56) = 224 \text{ min} = 3h \ et 44 \text{ min}$

La première rencontre aura lieu après 3h et 44mn

La première rencontre aura lieu donc à 10 h 44 min.

b) La première rencontre aura lieu à 10 h 44 min.

La 2ème rencontre aura lieu à 14 h 28 min

La 3ème rencontre aura lieu à 18 h 12 min

La 4ème rencontre aura lieu à 21 h 56 min.



28 SE PERFECTIONNER

Soit n le nombre de bouquets.

n est un diviseur commun de 90, 120 et 135

Si on veut que n soit maximum, il faut prendre n = PGCD (90 , 120 , 135).

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$135 = 3^3 \times 5$

PGCD (90, 120, 135) = 15 d'où n = 15.

Composition des bouquets à choisir :

Le nombre de roses blanches est $\dfrac{135}{15}$ soit 9 roses blanches.

Le nombre de roses rouges est $\dfrac{120}{15}$ soit 8 roses rouges.

Le nombre de roses jaunes est $\dfrac{90}{15}$ soit 6 roses jaunes.



29 SE PERFECTIONNER

1) Parmi les couples (a, b) d'entiers n'ayant pas de diviseur commun (autre que 1) et dont la somme vaut 24, il y a a=1et b =23 ; a =5 et b =19 ; a =7 et b =17 ; a =11et b =13.

2) Si pgcd(x ; y) = 4, alors 4 divise x et y ,

Donc x =4n et y =4m où m et n sont des entiers premiers entre eux (si non 4 ne serait pas le pgcd de x et y.

Puisque $x + y = 96$, on en déduit donc 4n +4m=96

D'où alors 4(n +m) =96 alors n +m =24

Il nous faut donc déterminer les couples d'entiers (n; m) premiers entre eux tels que n +m =24.

Ceci ayant été fait dans la question 1) ,

On conclut que : n =1et m =23 ; n =5 et m=19 ; n =7et m =17 ; n =11 et m =13.

Multipliant par 4 on obtient : x =4et y =92 ; x = 20 et y =76 ; x =28 et y =68 ; x=44 et y =52

- ***Valeur approchée – Arrondis***



30 APPLIQUER

$a = 224{,}5 = 2{,}245 \times 10^2$,

$b = 573{,}3 \times 10^{-5} = 5{,}733 \times 10^2 \times 10^{-5} = 5{,}733 \times 10^{-3}$

$c = 5425{,}331 = 5{,}425331 \times 10^3$

d = $0,000715 \quad = 7,15\times10^{-4}$

e = $0,00247\times10^{8} = 2,47\times10^{-3}\times10^{8} = 2,47\times10^{5}$

31 APPLIQUER

Nombre	$\frac{637}{17} \simeq 37,47058824$				
	A 10 prés	à l'unité (1 près)	au dixième (0,1près)	au centième (0,01 prés)	au millième (0.001près)
Valeur approchée	30	37	34,4	37,47	37,370
arrondi	40	37	34,5	37,47	37,371

32 APPLIQUER

Nombre	$\pi^2 \simeq 9,869604401$			
	À la dizaine (1 près)	au dixième (0,1près)	au centième (0,01 prés)	au millième (0.001près)
Valeur approchée	9	9 ,8	9,86	9,869
arrondi	10	9,9	9,87	9,870

33 S'ENTRAINER

$$B = \frac{6\times10^{-7}\times150\times10^{20}}{8\times\left(10^{2}\right)^{4}} = \frac{6\times150\times10^{13}}{8\times10^{8}} = \frac{6\times150}{8}\times10^{13-8}$$

$$= 112,5\times10^{5} = 1,125\times10^{2}\times10^{5} = 1,125\times10^{7}$$

34 SE PERFECTIONNER

Dans des plaques rectangulaire de cuivre de (de 20 cm et 23 cm)

1) Déterminer l'aire $A = 20\times23 - \pi r^2$

$= 460 - \pi r^2 \text{ cm}^2.$

2) Pour r = 2 cm on a : $A = 460 - 4\pi \text{ cm}^2$

La calculatrice affiche que $A \simeq 447,4336294 \text{ cm}^2$

Une valeur approchée à 0,01 prés de A est 447,43 cm^2

Théorème de Thalès et sa réciproque

I) Résumé du cours :

- **METHODE 1 : Calculer une longueur :**

Théorème de Thalès

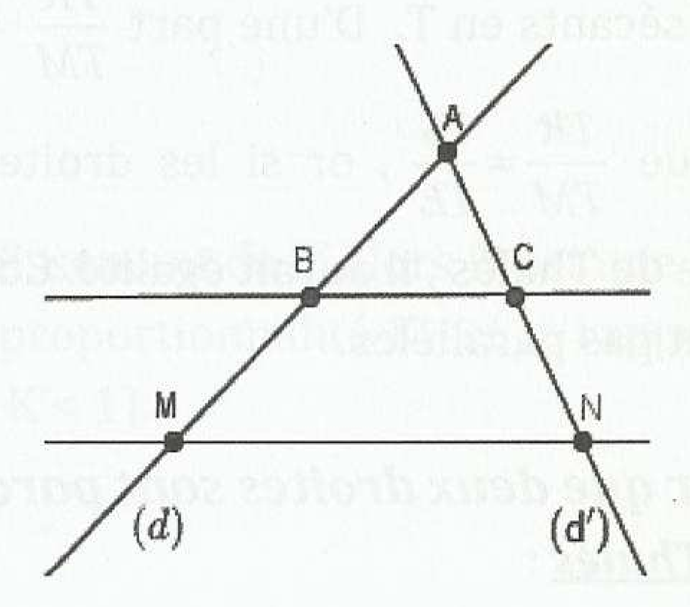
Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. B et M sont deux points de (d) distincts de A. C et N sont deux points de (d') distincts de A, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemple 1 : Sur la figure ci-contre, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. AB=3cm ; AN=4cm et AM=7cm.

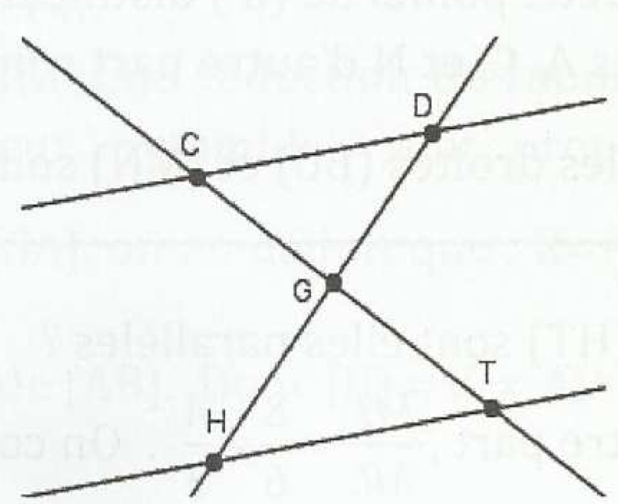
Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

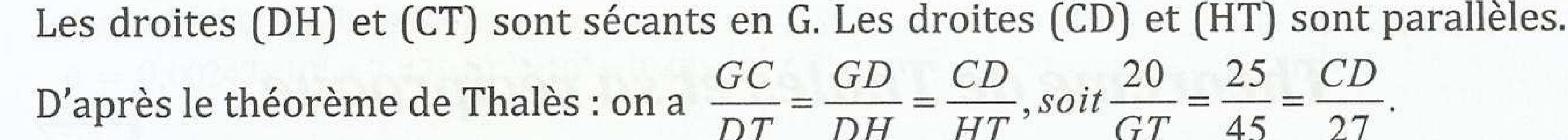
D'après le théorème de Thalès : on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, soit $\frac{3}{7} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{MN}$.

Calcul de AC : $7 \times AC = 3 \times 4$ soit AC= $\frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}\ donc AC = \frac{12}{7}\ cm$.



Exemple 2 : sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On donne DG=25mm ; GH=45mm ; CG=20mm et HT=27mm. Calculer GT et CD.





Les droites (DH) et (CT) sont sécants en G. Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

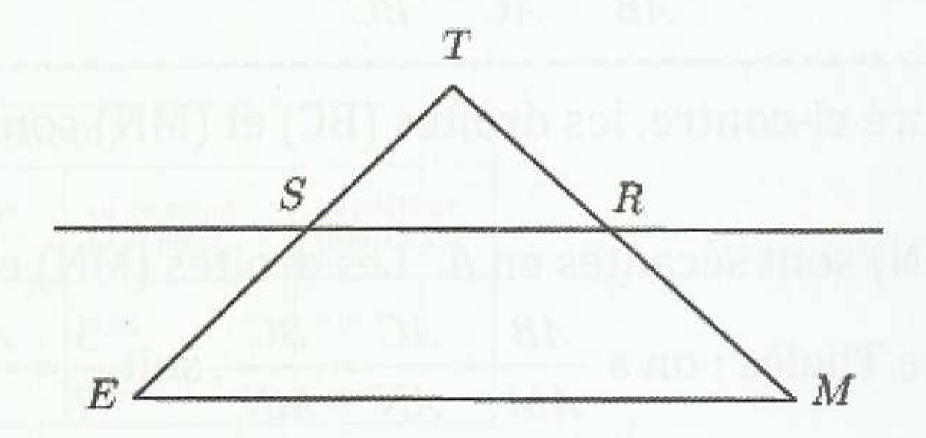
D'après le théorème de Thalès : on a $\frac{GC}{DT} = \frac{GD}{DH} = \frac{CD}{HT}, soit \frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$.

Calcul de $GT : 25 \times GT = 45 \times 20, GT = \frac{45 \times 20}{25}, donc GT = 36mm$

Calcul de CD : $25 \times 27 = 45 \times CD, CD = \frac{25 \times 27}{45}, donc CD = 15mm$

- ***METHODE 2 : Montrer que deux droites ne sont pas parallèles.***

Exemple : Sur la figure ci-contre, TR = 11cm , TS = 8cm , TM = 15 cm et TE =10 cm.



Montrer que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

Les droites (ES) et (MR) sont sécants en T. D'une part $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$ et d'autre part $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$. On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$, or si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès , il aurait égalité. Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

- ***METHODE 3 : Montrer que deux droites sont parallèles.***

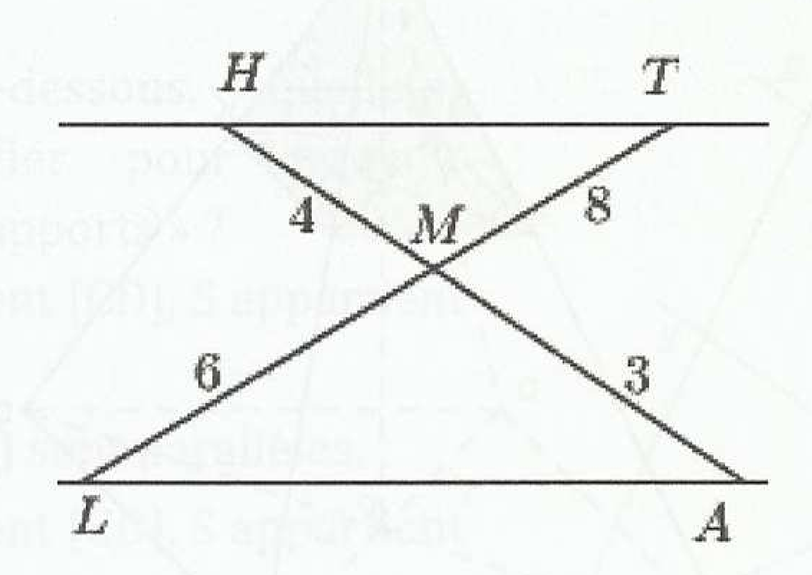
<u>Réciproque du théorème de Thalès</u> :

> Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A. B et M sont deux points de (d) distincts de A. C et N sont deux points de (d') distincts de A. si les points A, B, et M d'une part et les points A, C, et N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple :Les droites (LA) et (HT) sont elles parallèles ?

D'une part $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$ et d'autre part , $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. On constate que, $\frac{MT}{ML} = \frac{MH}{MA}$. De plus, les points A, M et H d'une part et les points M, L et T d'autre part sont alignés

dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.



- ***METHODE4 : Agrandir ou réduire une figure.***

Lorsque deux figures ont la même forme et des longueurs proportionnelles, on dit que l'une est un agrandissement ou une réduction de l'autre. Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

Remarque :

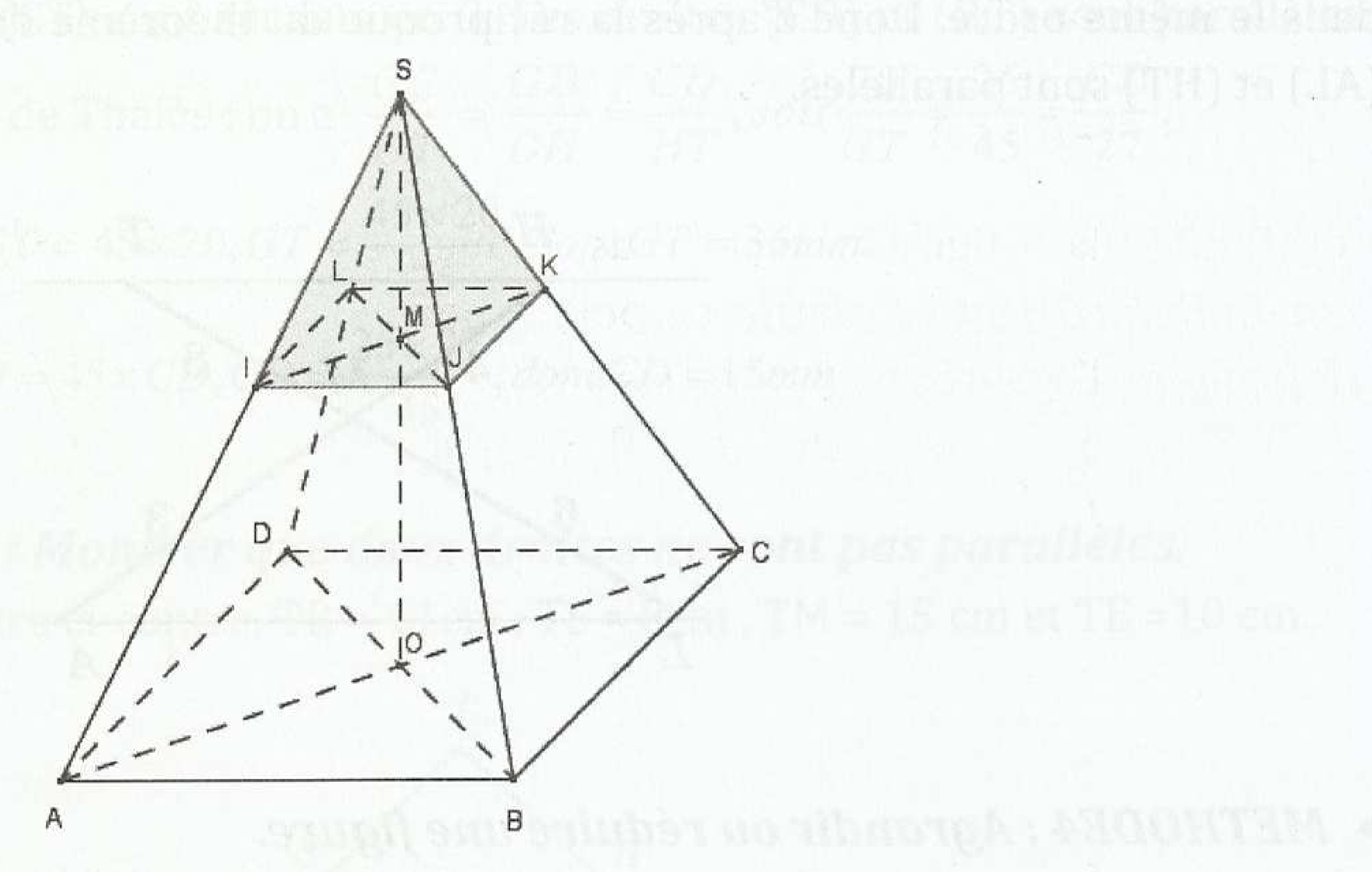
- si F est un agrandissement de F' alors F' est une réduction de F.
- Le coefficient de proportionnalité K est le rapport d'agrandissement $(K > 1)$ ou réduction $(0 < K < 1)$.

Exemple 1 :

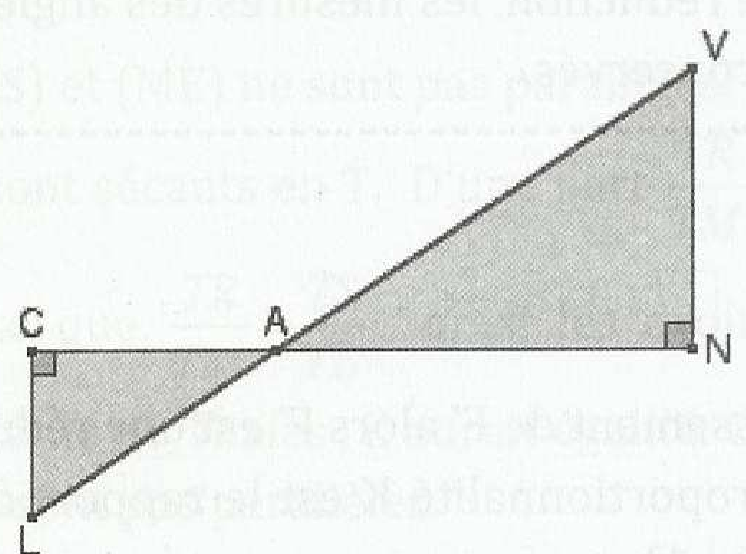
La pyramide SIJKL une réduction de la pyramide SABCD. On donne AB= 6cm, SA = 15cm , SI = 5cm. Calculer IJ.

On sait que la pyramide SIJKL une réduction de rapport K de la pyramide SABCD. Donc les longueurs de deux pyramides sont proportionnelles. [SI] étant une réduction de rapport K de [SA], on en déduit que : $K=\frac{SI}{SA}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. De même [IJ] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AB]. Donc $[IJ] = K \times AB = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \times 6 = 2$cm.

dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.



Exemple 2 : Les droites (VL) et (CN) sont sécantes en A. (LC) et (VN) sont perpendiculaire à (CN). Le triangle LAC est-il une réduction du triangle VAN ? Justifier votre réponse.

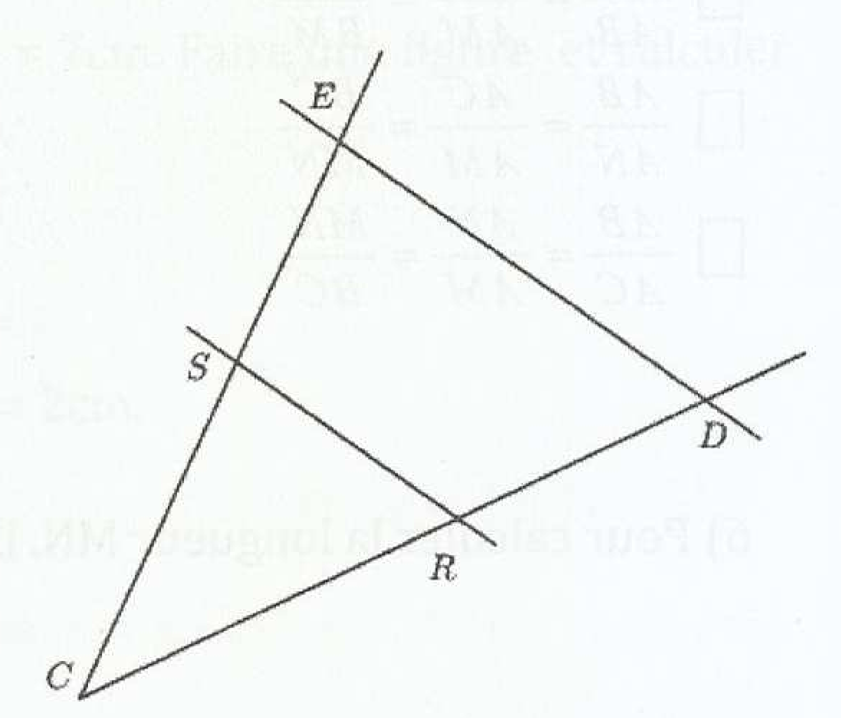


1) Les triangles LAC et VAN sont deux triangles rectangles donc ils ont la mêmeforme. Vérifions que les longueurs sont proportionnelles.
Les droites (CL) et (VN) sont sécantes en A. Les droites (LC) et (NV) sont perpendiculaires à la même droite (AN) donc elles sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{AN}{AC}=\frac{AV}{AL}=\frac{NV}{LC}$. Les longueurs des triangles VAN et LAC sont donc proportionnelles. On peut alors conclure que le triangle LAC est une réduction du triangle VAN.



II) Exercices

1 VRAI-FAUX



1) Dans la figure ci-dessous, quelle(s) condition(s) faut-il vérifier pour pouvoir appliquer « l'égalité des 3 rapports » ?

☐ R appartient au segment [CD], S appartient au segment [CE].

☐ Les droites (RS) et (DE) sont parallèles.

☐ R appartient au segment [CD], S appartient au segment [CE] et les droites (RS) et (DE) sont parallèles.

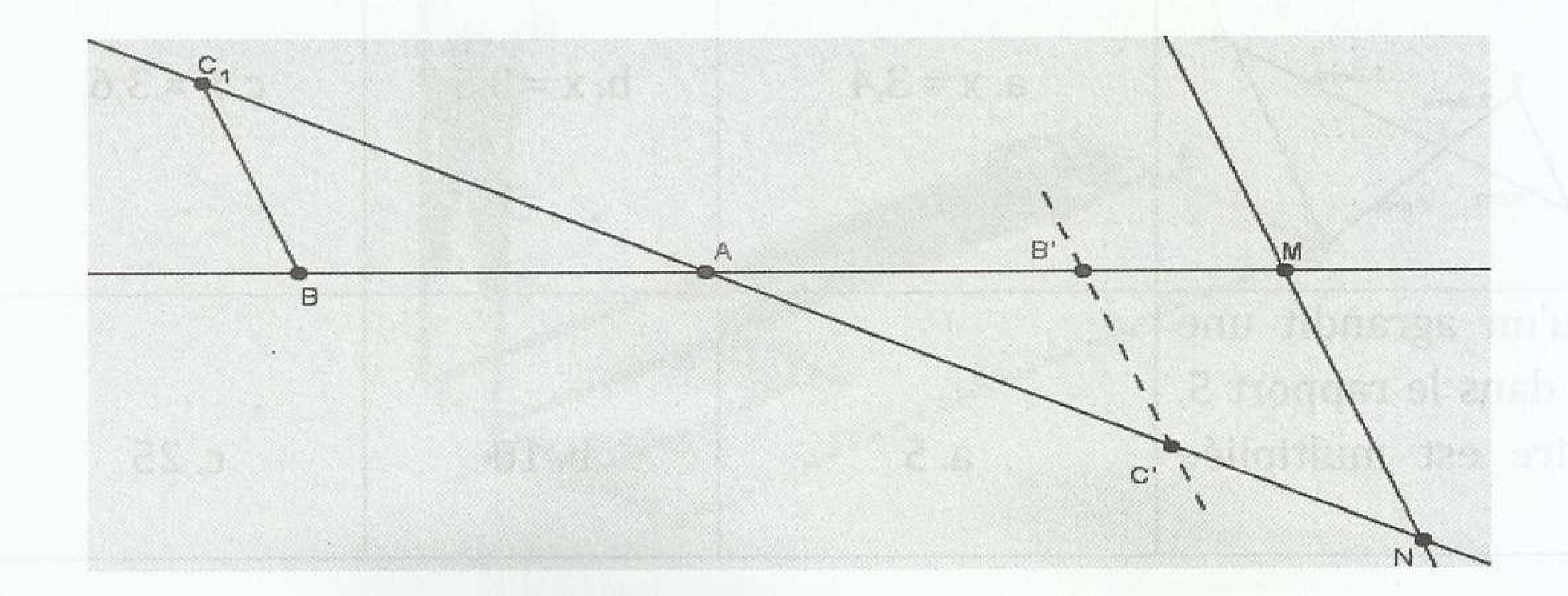
2) Sans justification, quelle est la conclusion de « l'égalité de 3 rapports » appliquée a la figure ci-dessus ?

☐ $\frac{CR}{CS} = \frac{CD}{CE} = \frac{DE}{RS}$ ☐ $\frac{CR}{CD} = \frac{CS}{CE} = \frac{RS}{DE}$ ☐ $\frac{CR}{CD} = \frac{CS}{CE} = \frac{DE}{RD}$

3) si $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$ alors ☐ $x = 2$ ☐ $x = \frac{12}{5}$ ☐ $x = \frac{20}{3}$

4) si $\frac{4}{x} = \frac{3}{5}$ alors ☐ $x = 6,67$ ☐ $x \simeq 7$ ☐ $x \simeq 6,67$

5) Dans la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. De plus AB=6cm et AC=8cm. On doit servir du théorème précédent appliqué aux triangles AB'C' et ANM ou l'on a placé les symétriques de B et C par rapport à A. On a donc AB=AB' et AC=AC' et (A'B') / /(BA)//(MN). « L'égalité des 3 rapports » permet d'écrire :



☐ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

☐ $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AM} = \frac{NC}{BM}$

☐ $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN}$

☐ $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{MN}{BC}$

6) Pour calculer la longueur MN, il manque

☐ *lalongueur AM*

☐ *leslongueurs AM et AN*

☐ *la longueur BC*

☐ *leslongueurs BC et AN*

7) Si la longueur AN= 15cm, alors:

☐ AM=18cm,

☐ AM=15cm,

☐ AM=20cm,

☐ AM=AN.

8) A l'aide de la question précédente, si MN =10cm alors :

☐ BC=10cm, ☐ BC= 6cm, ☐ BC=12cm, ☐ BC=4cm.



2 VRAI-FAUX

Quelle valeur de x rend les droites (BK) et (NC) parallèles ? B, N, E, K, C ; 7.5cm, 2.8cm, xcm, 6cm	a. x = 3,4	b. x = 3,5	c. x = 3,6
Lorsqu'on agrandit une figure dans le rapport 5, son aire est multipliée par :	a. 5	b. 10	c. 25

3 APPLIQUER

(MN)//(BC), AB = 10cm, AC = 8cm, BC = 6cm, AM = 7cm. Faire une figure et calculer AN et MN.



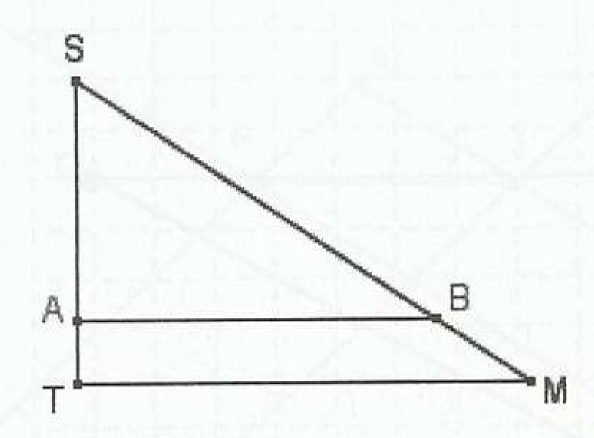
4 APPLIQUER

(EF)// (AB). OF = 5cm, OE = 10cm, EF = 8cm, OA = 2cm.
Faire une figure. Calculer OB et AB.



5 APPLIQUER

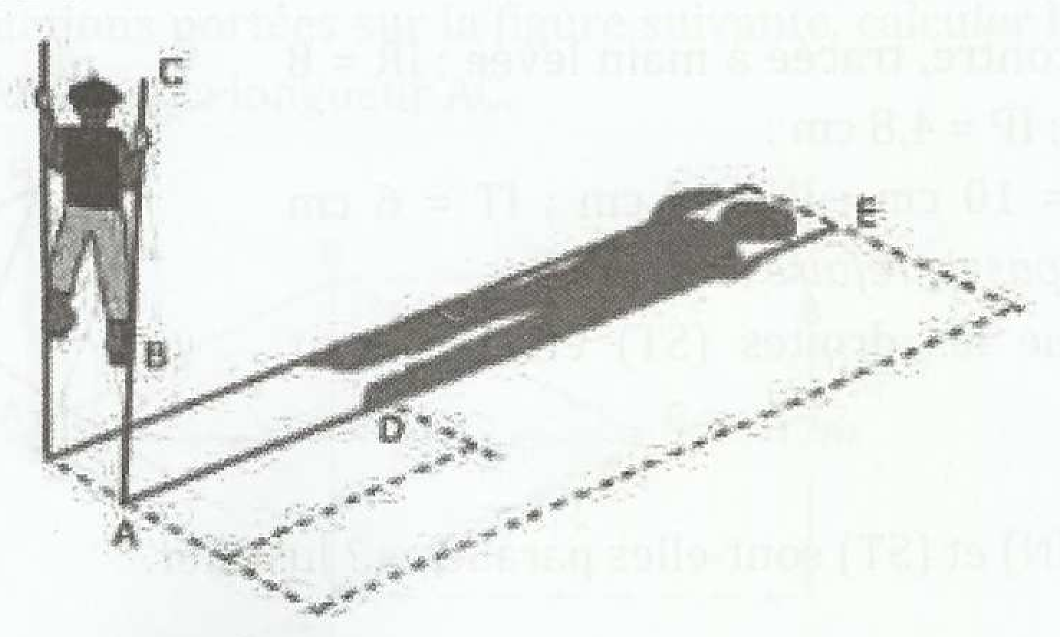
(AB)//(TM). TS = 5cm, AS = 4cm, AB = 7cm. Calculer TM.





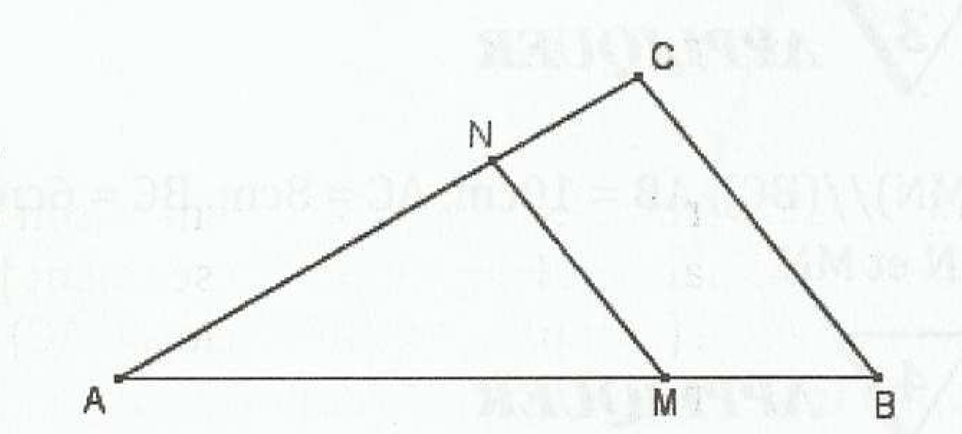
6 APPLIQUER

On suppose que les rayons du soleil sont parallèles. AB =120 cm, AD = 210 cm, AE = 518 cm. Calculer BC.



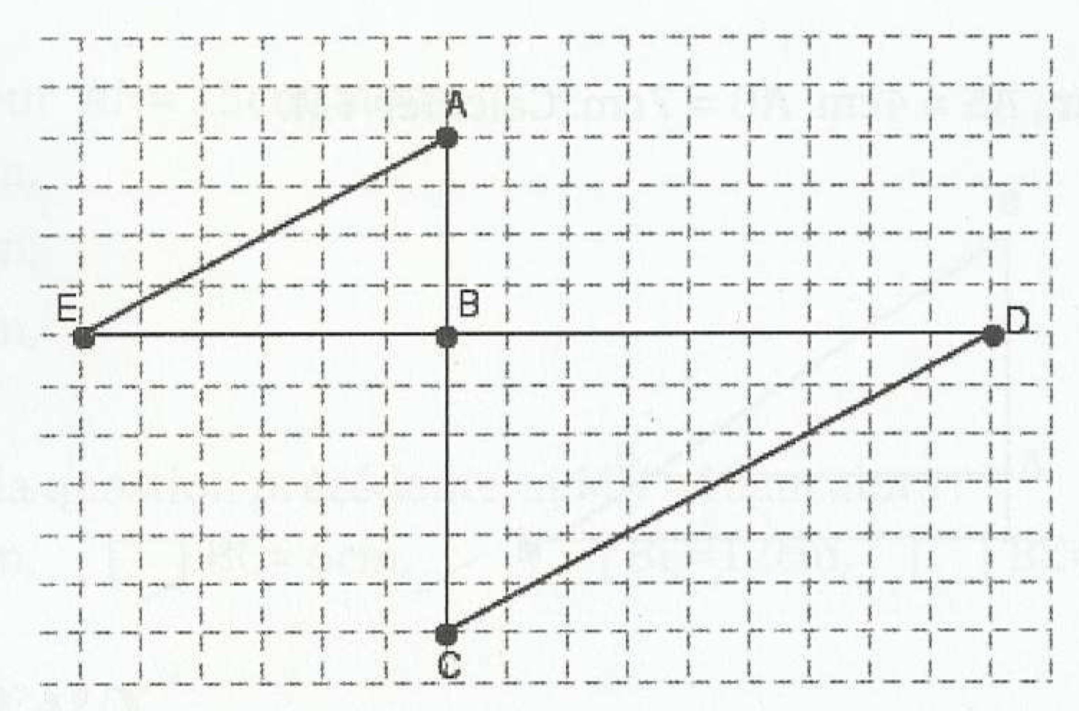


On donne: AB = 11cm, AM = 7cm, AC = 13,2cm, AN = 8,4cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?





Les points A, B, C, D et E sont sur les nœuds de la grille. Les droites (AE) et (DC) sont-elles parallèles ?



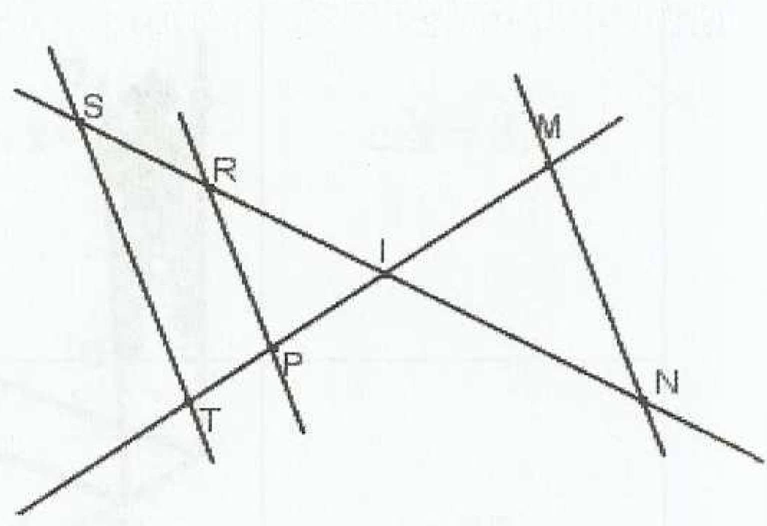


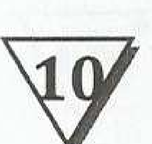
Sur la figure ci-contre, tracée à main levée : IR = 8 cm ; RP = 10 cm ; IP = 4,8 cm ;
IM = 4 cm ; IS = 10 cm ; IN = 6 cm ; IT = 6 cm
(*On ne demande pas de refaire la figure.*)

1. Démontrer que les droites (ST) et (RP) sont parallèles

2. En déduire ST

3. Les droites (MN) et (ST) sont-elles parallèles ? Justifier.

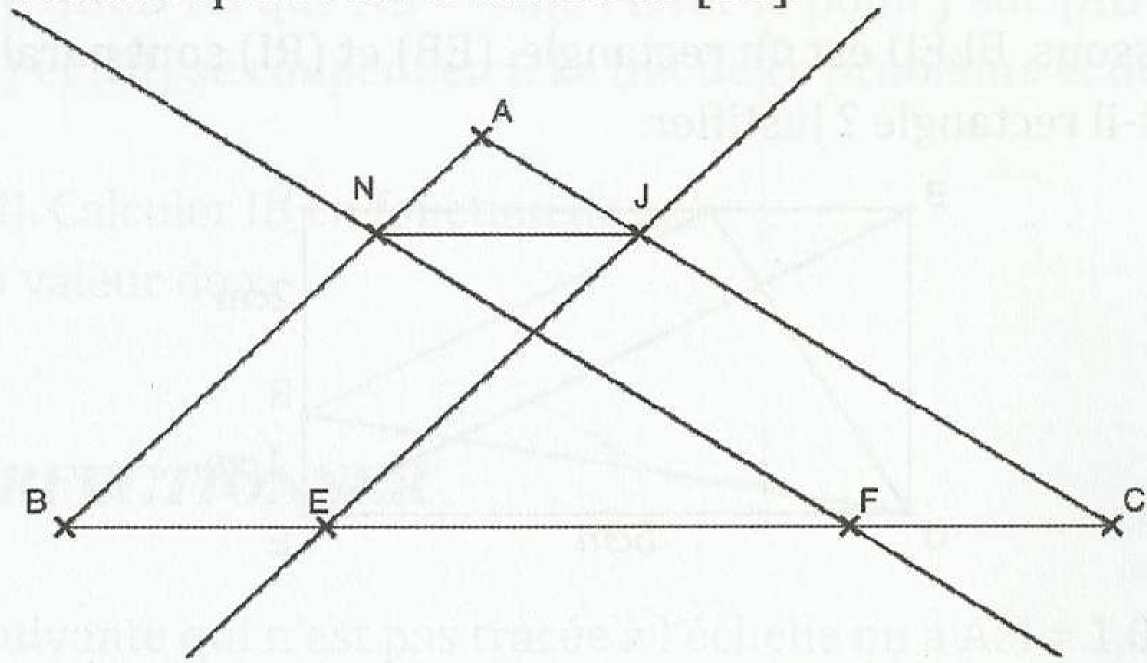




S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle tel que BC = 8cm et soit x un réel appartenant à]0, 4[.
On désigne par E et F les points du segment [BC] tels que BE = CF = x.
La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en J et la parallèle à (AC) passant par F coupe (AB) en N.

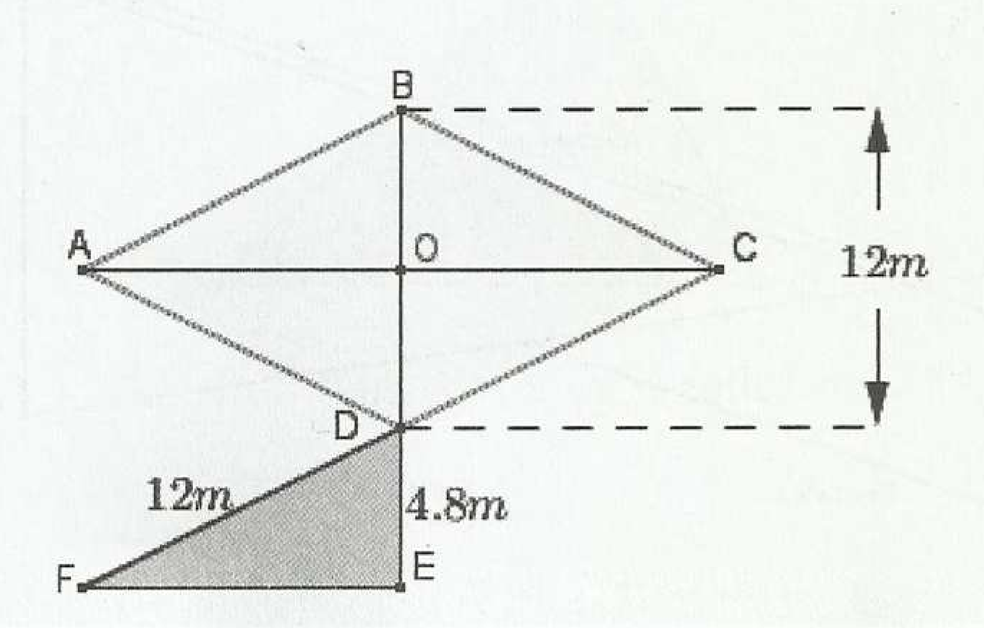
1) a) Comparer : $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{CF}{CB}$ ainsi que $\frac{AJ}{AC}$ et $\frac{BE}{BC}$.
   b) En déduire que (NJ) // (BC)
2) Quelle est la nature de quadrilatère NBEJ ? Déterminer alors la valeur de x pour laquelle NJFE est un parallélogramme.
3) Les droites (EJ) et (FN) se coupent en I et (AI) coupe (BC) en M.
   a) Comparer : $\frac{ME}{BE}, \frac{MI}{AI}$ et $\frac{MF}{CF}$.
   b) En déduire que M est le milieu de [BC].





SE PERFECTIONNER

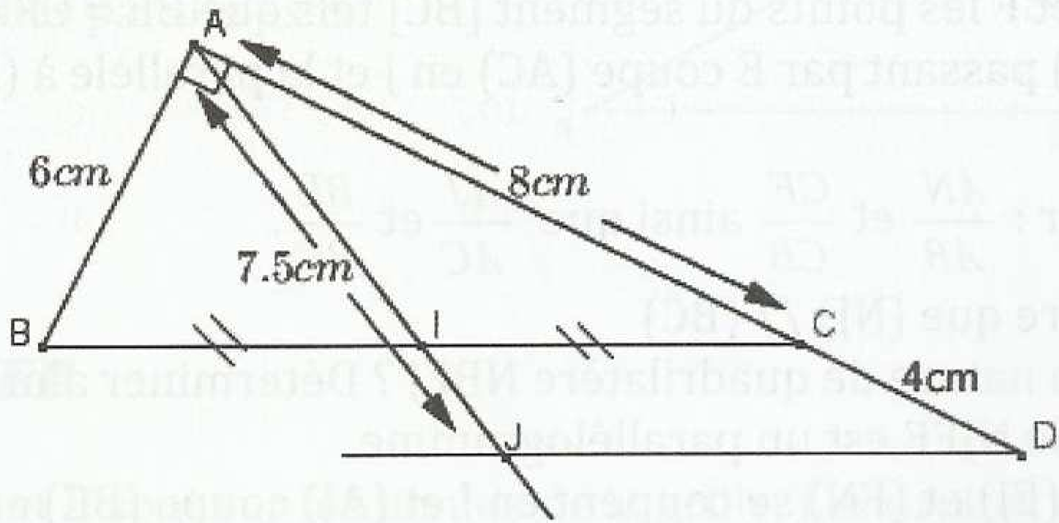
En utilisant les informations portées sur la figure suivante, calculer la longueur d'un coté du quadrilatère ABCD et la longueur AC.





SE PERFECTIONNER

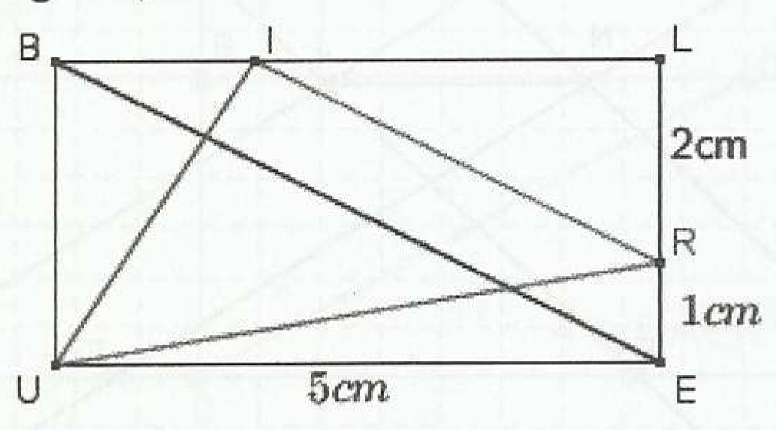
En utilisant le codage et les mesures de la figure suivante, démontrer que (IC) et (JD) sont parallèles.





SE PERFECTIONNER

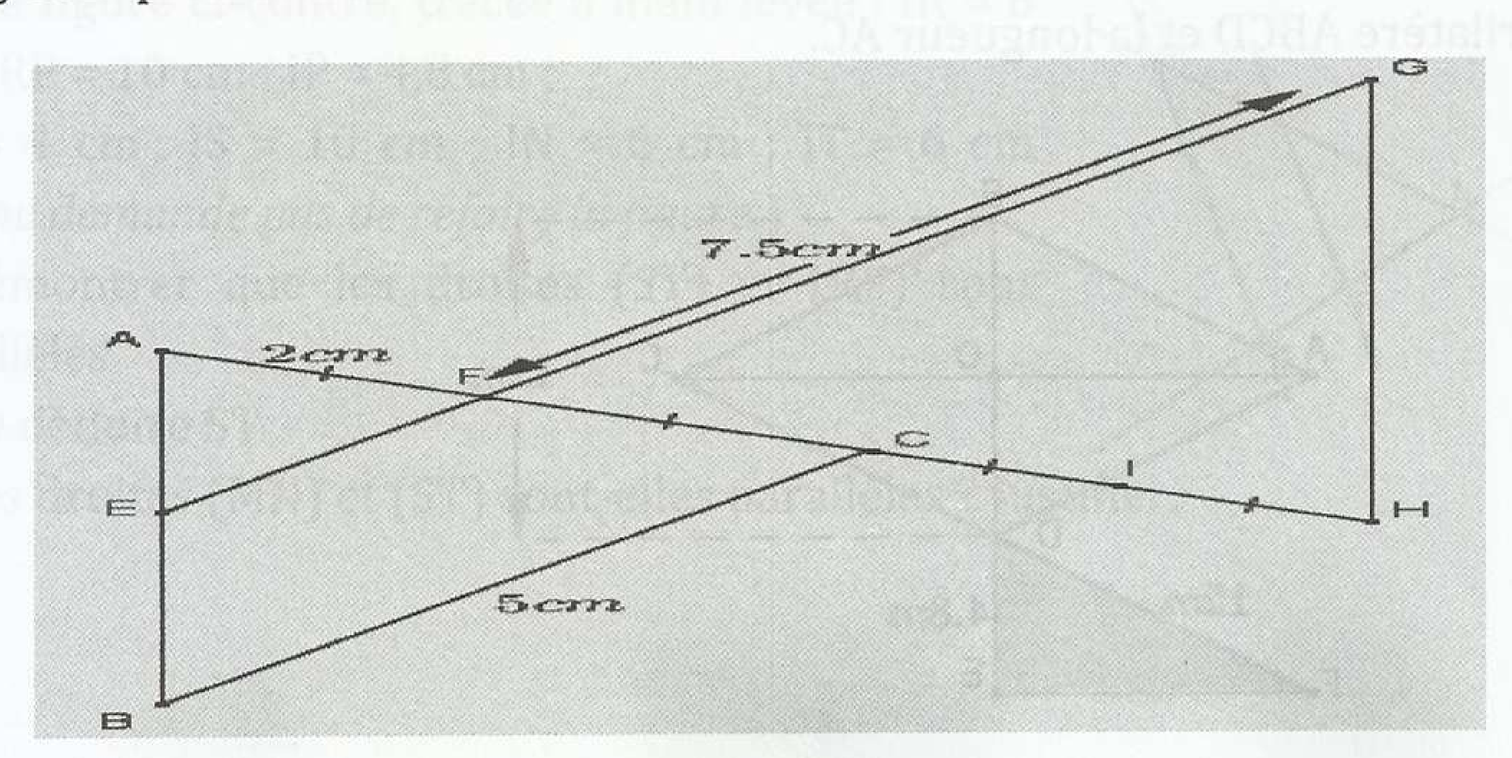
Sur la figure ci-dessous, BLEU est un rectangle. (EB) et (RI) sont parallèles.
Le triangle UIR est-il rectangle ? Justifier.





SE PERFECTIONNER

En utilisant le codage et les mesures de la figure suivante, démontrer que (EA) et (GH) sont parallèles.





SE PERFECTIONNER

(Problème de construction):
a)Tracer un segment [AB],

Sans règle graduée comment placer un point M de [AB] tel que $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$?

b) Tracer un segment [CD] et en utilisant une méthode analogue à la méthode précédente, placer un point E tel que $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{5}$.



SE PERFECTIONNER

(Calcul littéral) :

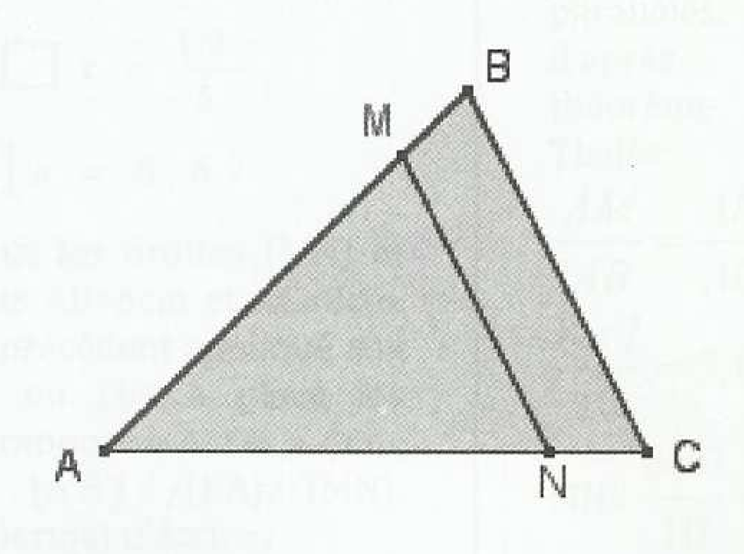
Tracer un carré ABCD tel que AB = 4cm. Placer le point J sur [AD] tel que AJ = 3cm. Les droites (AC) et (BJ) se coupent en I. Le but de ce problème et de calculer IJ.

a) Calculer JB.
b) on pose x = IJ. Calculer IB en fonction de x.
c) on déduire la valeur de x.



SE PERFECTIONNER

Dans la figure suivante qui n'est pas tracée à l'échelle on a AM = 1,000001 AB =1,000002, AC= 1,000001, AN=1. Les mesures sont exprimées dans la même unité. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



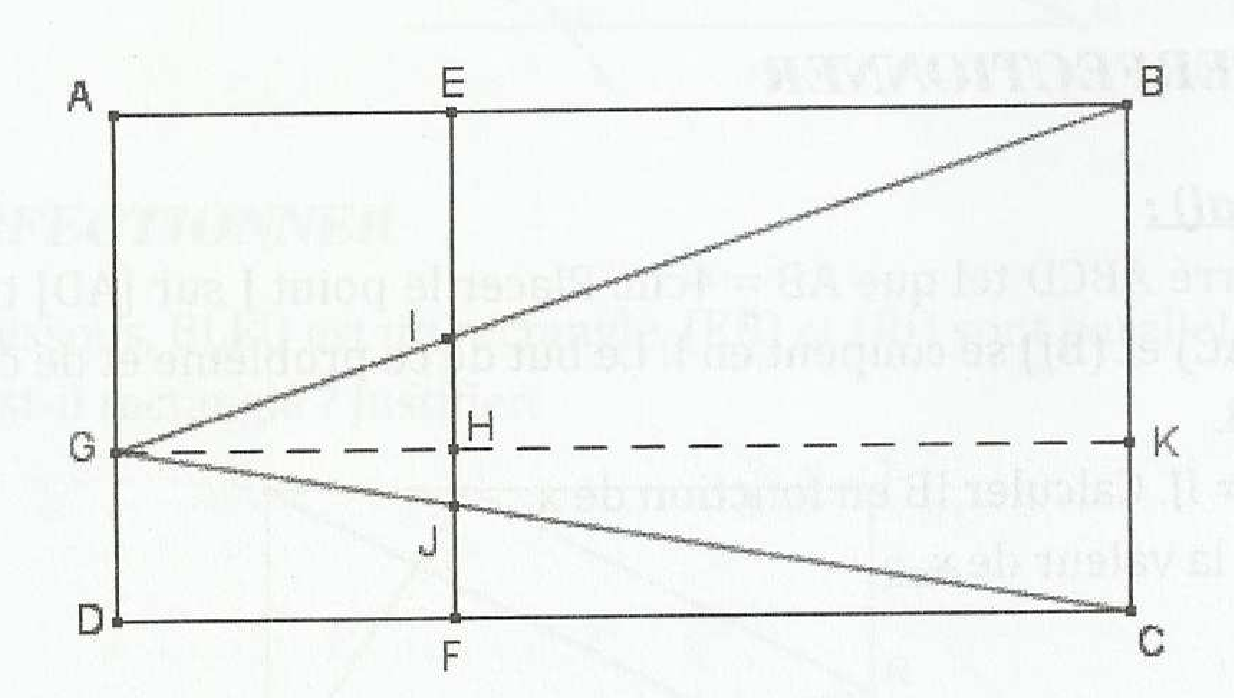


18 SE PERFECTIONNER

(de recherche) :

ABCDest un rectangle. La droite (EF) (E est un point de [AB] et F est un point de [CD]) est parallèle aux supports des cotés [AD] et [BC] du rectangle.

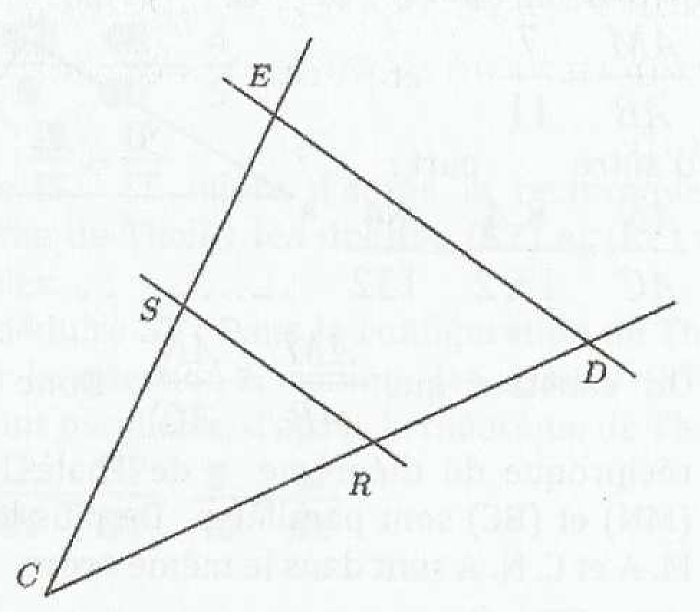
G est un point quelconque du coté [AD]. Les droites (GB) et (GC) coupent la droite (EF) respectivement en I et J. Montrer que la longueur IJ ne dépend pas de la position de G sur [AD]. (Aide : La perpendiculaire à la droite (BC) passant par G coupe [EF] en H et [BC] en K)





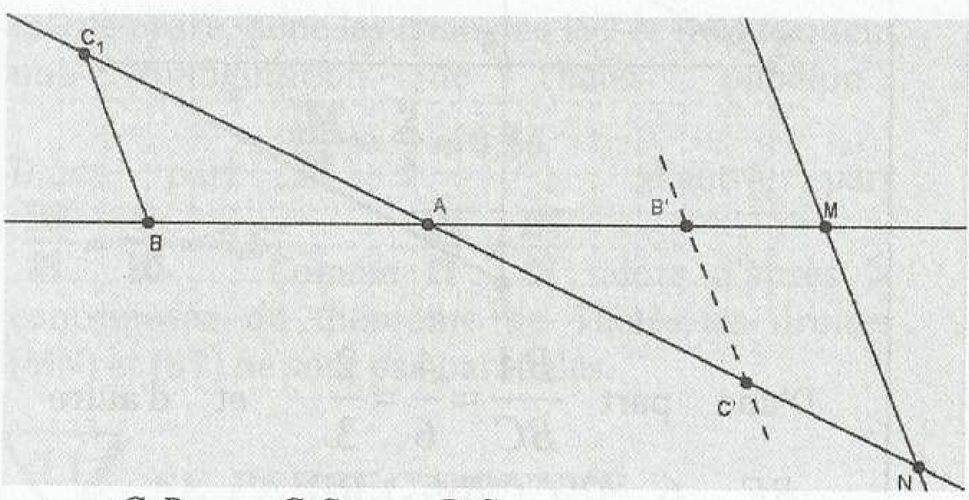
VRAI-FAUX

1) Dans la figure ci-dessous, quelle(s) condition(s) faut-il vérifier pour pouvoir appliquer « l'égalité des 3 rapports » ?



☐ R appartient au segment [CD], S appartient au segment [CE] et les droites (RS) et (DE) sont parallèles.

2) Sans justification, quelle est la conclusion de « l'égalité de 3 rapports » appliquée a la figure ci-dessus ?



☐ $\frac{CR}{CD} = \frac{CS}{CE} = \frac{RS}{DE}$

3) si $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$ alors ☐ $x = \frac{12}{5}$

4) si $\frac{4}{x} = \frac{3}{5}$ alors ☐ $x = 6,67$

5) Dans la figure ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. De plus AB=6cm et AC=8cm. On doit servir du théorème précédent appliqué aux triangles AB'C' et ANM ou l'on a placé les symétriques de B et C par rapport à A. On a donc AB=AB' et AC=AC' et (A'B')//(BA)//(MN). « L'égalité des 3 rapports » permet d'écrire :

☐ $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN}$

6) Pour calculer la longueur MN, il manque

☐ *leslongueurs BC et AN*

7) Si la longueur AN= 15cm, alors:

☐ AM=20cm,

8) A l'aide de la question précédente, si MN =10cm alors : ☐ BC=4cm.



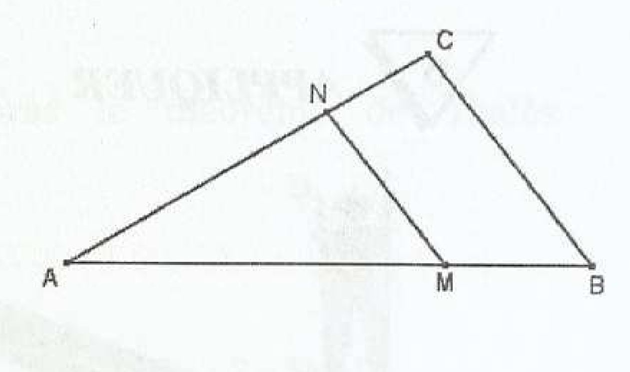
VRAI-FAUX

Quelle valeur de x rend les droites (BK) et (NC) parallèles ? B N K C E 2.8cm 7.5cm xcm 6cm		c. x = 3,6
Lorsqu'on agrandit une figure dans le rapport 5, son aire est multipliée par :		c. 25



APPLIQUER

Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès:



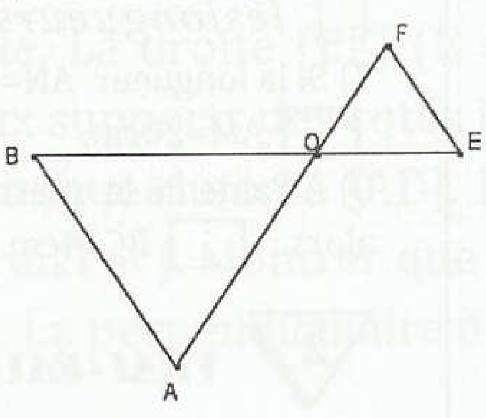
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{AN}{8} = \frac{MN}{6}$ AN= $\frac{8 \times 7}{10} = 5,6cm$

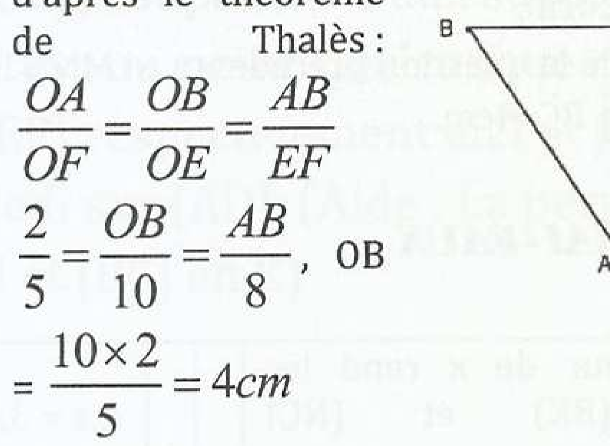
MN= $\frac{6 \times 7}{10} = 4,2cm$



APPLIQUER

Les droites (AF) et (BE) sont sécants en O. Les droites (EF) et (AB) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès :





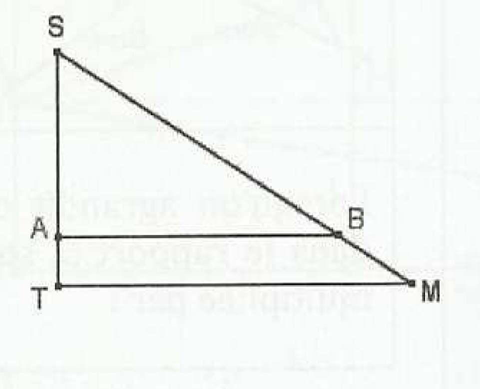
$\frac{OA}{OF}=\frac{OB}{OE}=\frac{AB}{EF}$

$\frac{2}{5}=\frac{OB}{10}=\frac{AB}{8}$, OB $=\frac{10\times2}{5}=4cm$

AB$=\frac{8\times2}{5}=3,2cm$

5 APPLIQUER

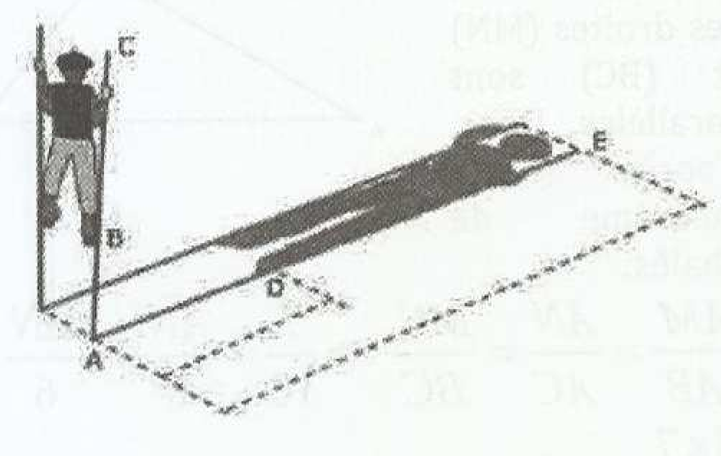
Les droites (TA) et (MB) sont sécants en S. Les droites (AB) et (TM) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès :



$\frac{SA}{ST}=\frac{AB}{TM}\ \frac{4}{5}=\frac{7}{TM}$

TM $=\frac{5\times7}{4}=8,75cm$.

6 APPLIQUER



Les droites (CB) et (ED) sont sécantes en A. Les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\frac{120}{AC}=\frac{210}{518}$

AC$=\frac{120\times518}{210}=296cm$ BC = AC- AB = 296 - 120 = 176cm.

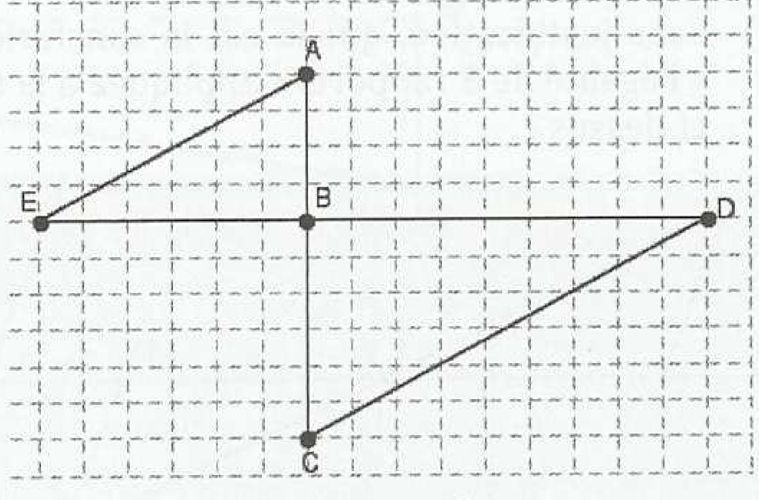


APPLIQUER

D'une part : $\frac{AM}{AB}=\frac{7}{11}$ et d'autre part : $\frac{AN}{AC}=\frac{8,4}{13,2}=\frac{84}{132}$

On constate que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. De plus les points B, M, A et C, N, A sont dans le même ordre.

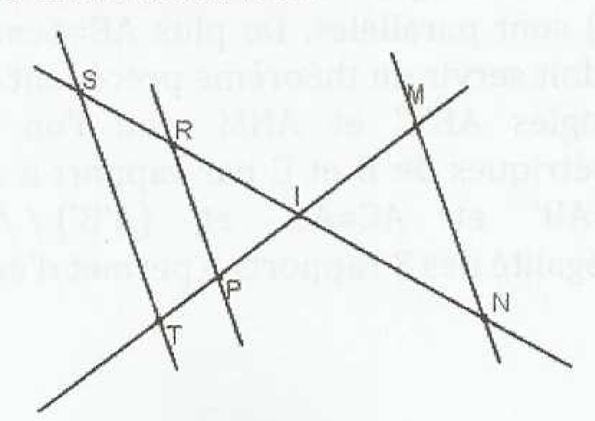
8 APPLIQUER



D'une part $\frac{BA}{BC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et d'autre part $\frac{BE}{BD}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{BA}{BC}=\frac{BE}{BD}$. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AE) et (DC) sont parallèles. De plus les points A, B, C et E, B, D sont alignés dans le même sens.



S'ENTRAINER



1) Démontrer que les droites (ST) et (RP) sont parallèles
Les points I, R, S et I, P, T sont alignés dans le même ordre, donc les triangles IRP et IST forment une configuration de Thalès.

D'une part : $\frac{IR}{IS}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ D'autre part : $\frac{IP}{IT}=\frac{4.8}{6}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$

Comme $\frac{IR}{IS}=\frac{IP}{IT}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (ST) et** (RP) sont parallèles.

2) En déduire ST **:** Dans la configuration de Thalès citée à la question **1**, comme les droites (ST) et (RP) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès,

on a : $\frac{IR}{IS}=\frac{RP}{ST}$, $\frac{8}{10}=\frac{10}{ST}$

Par produit en croix : $8\times ST=10\times 10$

$$ST=\frac{10\times 10}{8}\Rightarrow ST=\frac{100}{8}=12,5cm.$$

3) Les droites (MN) et (ST) sont-elles parallèles ? Justifier
Les points S, I, M et T, I, M sont alignés dans le même ordre, donc les triangles IST et INM forment une configuration de Thalès "papillon".

D'une part $\frac{IM}{IT}=\frac{2}{3}\approx 0,66$ d'autre part $\frac{IN}{IS}=\frac{6}{10}=0,6$ Comme $\frac{IM}{IT}\neq\frac{IN}{IS}$, alors d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (ST) ne sont pas parallèles.



SE PERFECTIONNER

On a $(OC)//(EF)$; (OE) et (FC) sécante en D d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{DO}{DE}=\frac{DC}{DF}=\frac{OC}{EF}$$

$$\frac{DO}{DE}=\frac{DC}{DF}\Leftrightarrow DC=\frac{DO\times DF}{DE}$$

$$DO=\frac{1}{2}DB=\frac{12}{2}=6m$$

Donc $DC=\frac{6\times 2}{4,8}=15m$

Le triangle EFD est rectangle en E d'après le théorème de Pythagore :

$$FD^2=DE^2+FE^2$$

$$\Rightarrow EF^2=12^2-4,8^2=120,96m$$

$$\Rightarrow EF=10,99m$$

On a $\frac{DC}{DF}=\frac{OC}{EF}\Rightarrow OC=\frac{DC\times EF}{DF}=\frac{15\times 10,99}{12}=13,73m$

$$AC=2\times OC=27,46m$$



SE PERFECTIONNER

Calculons $\frac{AI}{AJ}$ et $\frac{AC}{AD}$

Le triangle ABC est rectangle en A donc I est le centre se cercle circonscrit, donc

$IA=IB=\frac{1}{2}BC$ or

$BC^2=AC^2+AB^2=36+64=100\Rightarrow BC=10$, par suite $IA=5cm$

Alors $\frac{AI}{AJ}=\frac{5}{7.5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ et $\frac{AC}{AD}=\frac{2}{3}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès

On a : $(IC)//(JD)$



SE PERFECTIONNER

On va calculer IU, IR et UR
On a :

$I\in(LB)$
$R\in(LE)$
$(IR)//(BE)$ } d'après le théorème de Thalès

$$\frac{LI}{LB}=\frac{LR}{LE}=\frac{IR}{BE}$$

$\frac{LI}{LB}=\frac{LR}{LE}\Rightarrow LI=\frac{LR\times LB}{LE}=\frac{2\times 5}{3}=\frac{10}{3}$ et par suite $IB=5-\frac{10}{3}=\frac{5}{3}cm$

Le triangle LBE est rectangle en L d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BE^2=LE^2+LB^2\Rightarrow BE^2=9+\left(\frac{15}{3}\right)^2=27$$

donc $BE=3\sqrt{3}$

- Calcul de IR : on a

$$\frac{IR}{BE}=\frac{LR}{LE}\Rightarrow IR=\frac{LR\times BE}{LE}=\frac{2\times 3\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

- Calcul de UR : le triangle REU est rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore on a $UR^2=UE^2+RE^2=25+1=26$

$\Rightarrow UR=\sqrt{26}$

- Calcul de IU : le triangle BIU est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on a : $UI^2=BI^2+BU^2=\frac{25}{9}+9=\frac{43}{9}$

Conclusion : d'après la réciproque de Pythagore le triangle IUR n'est rectangle



14 SE PERFECTIONNER

On a :

$$\left.\begin{array}{l} E\in(AB) \\ F\in(AC) \\ (EF)//(BC) \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

$$\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow EF=\frac{AF\times BC}{AC}=\frac{5}{2}$$

Calculons $\frac{AF}{HF}$ et $\frac{EF}{FG}$

$\frac{AF}{HF}=\frac{1}{3}$ et $\frac{EF}{FG}=\frac{\frac{5}{2}}{7.5}=\frac{1}{3}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (AE) et (HG) sont parallèles.



15 SE PERFECTIONNER

(Problème de construction):

Tracer une demi-droite d'origine A, Placer sur cette demi-droite en point N, un point P et un point Q tel que AN = NP = PQ (sans utiliser de règle graduée). Tracer la droite (QB). Tracer la droite parallèle à (QB) qui passe par N, elle coupe (AB) en M. démontrer que M répond bien a la question c'est-à-dire que $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$.

b) Tracer un segment [CD] et en utilisant une méthode analogue à la méthode précédente, placer un point E tel que $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{5}$.



16 SE PERFECTIONNER

a) Le triangle AJB est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$JB^2=AJ^2+AB^2=9+16=25\Rightarrow JB=5$

b) $JB=JI+IB\Rightarrow IB=5-x$

c) On a (AJ)//(BC) et (AC) et (BJ) sécantes en I, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{IJ}{IB}=\frac{IA}{IC}=\frac{AC}{AB}$$

$\frac{IJ}{IB}=\frac{AC}{AB}\quad\Rightarrow IJ=\frac{AC\times IB}{BC}$ signifie que

$$x=\frac{3\times(5-x)}{4}\Rightarrow 4x=15-3x\Rightarrow 7x=15$$

Donc $x=\frac{15}{7}$.



17 SE PERFECTIONNER

On a $I\in(GB); J\in(GC)$ et $(IJ)//(BC)$ d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{GI}{GB}=\frac{GJ}{GC}=\frac{IJ}{BC}(1)$$

On a aussi $\frac{GI}{GB}=\frac{GH}{GS}=\frac{IH}{BS}(2)$

D'après (1) et (2) on a : $\frac{IJ}{BC}=\frac{IH}{BS}$

$$\Rightarrow IJ=\frac{BC\times IH}{BS}$$

Donc IJ qui ne dépend pas de point G

Activités numériques II

I) Résumé de cours

Utiliser les formules sur les puissances :

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p : $a^m \times a^p = a^{m+p}$; $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ et $\left(a^m\right)^p = a^{m\times p}$

Exemple1 :
Ecrire les expressions suivantes sous la forme a^n ou est un nombre relatif non nul et n un entier relatif :

$A = 5^7 \times 5^4$; $B = \frac{(-2)^{-2}}{(-2)^{-6}}$; $C = \left(0,2^{-3}\right)^4$; $D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi$

$A = 5^7 \times 5^4 = 5^{7\times 4}$; $B = \frac{(-2)^{-2}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^1 = (-2)$; $C = \left(0,2^{-3}\right)^4 = 0,2^{-3\times 4} = 0,2^{-12}$;

$D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 = 1$

Exemple2 :

1) Ecrire le nombre $E = \frac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{8^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

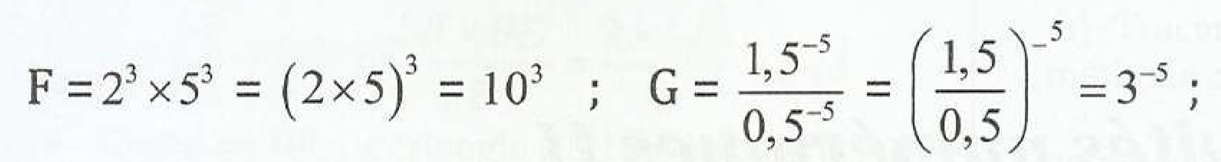
$E = \frac{(-2)^4 \times \left(2^2\right)^{-5}}{\left(2^3\right)^{-3}} = \frac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-9}}$ on remarque que $(-2)^4 = 2^4$ et on applique les règles sur les puissances. $E = 2^{4+(-10)-(-9)} = 2^{4-10+9} = 2^3$

2) Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple3 : Ecris les expressions suivantes sous la forme a^n ou a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif :

$F = 2^3 \times 5^3$; $G = \frac{1,5^{-5}}{0,5^{-5}}$; $H = (-6)^{-5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$; $I = \frac{\pi^4}{7^4}$



$F = 2^3 \times 5^3 = (2\times 5)^3 = 10^3$; $G = \dfrac{1,5^{-5}}{0,5^{-5}} = \left(\dfrac{1,5}{0,5}\right)^{-5} = 3^{-5}$;

$H = (-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6\times\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5}$; $I = \dfrac{\pi^4}{7^4} = \left(\dfrac{\pi}{7}\right)^4$

✎ *Utiliser les formules sur les radicaux :*

Si a et b sont deux nombres positifs alors :

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$

NB : Il n'y a pas de règles avec l'addition ou la soustraction : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

✎ *Résoudre des équations du type $x^2 = a$;* $a \in \mathbb{R}$

Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ comme unique solution $x = 0$.

Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions qui sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

II) Exercices



1 VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Un nombre décimal ne peut pas être un entier.
2) Un nombre décimal est un rationnel.
3) Un nombre décimal est un réel.
4) Un nombre irrationnel peut être un entier.
5) Un nombre entier relatif est un décimal.
6) L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.
7) *L'inverse d'un entier autre que 0 est un décimal.*
8) $a-b$ et $b-a$ sont deux nombres inverses.
9) l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

2 VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.
Remplir le tableau suivant

	Vrai	Faux
Il revient au même d'augmenter le prix d'un article de 20% puis de 30% que de l'augmenter de 30% puis de 20%.		
Pour augmenter un prix de 20,6% on le multiplie par 1,206.		
54% de 40 euros font 21 euros et soixante cents.		
Quand on augmente de 17%, puis, diminue de 17%, on ne change rien.		
Un Compteur EDF sous estime de 20% la consommation. Quand on lit 1300 kW, la consommation réelle est de 1625 kW.		
Pour diminuer de 27%, on multiplie par 0,73		
43 020 euros représente 31% du salaire d'un riche homme d'affaire. Il gagne donc 133 362 euros.		
Il revient au même d'augmenter le prix d'un article de 20% puis de le baisser de 15% que de le baisser de 15% puis de l'augmenter de 20%.		
Pour augmenter de 8%, on multiplie par 1,8.		
Une balance exagère de 20%. On pèse de la farine et on lit 160 g. Il y a en fait 128 g de farine.		
Augmenter de 23% puis de 5%, c'est augmenter de 28%.		

3 APPLIQUER

a, b et c sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p \times b^q \times c^r$:

$A=\dfrac{c}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$ $B=a^5(bc)^2\times\dfrac{1}{\left(a^3b\right)^2}$ $C=\dfrac{ab^2}{ca^{-2}}$ $D=\left(a^3b^{-5}\right)^2$



En précisant les différentes étapes de calcul :

1) Ecrire le nombre A ci-dessous sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A=\frac{3-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}\times 7}$$

2) Ecrire le nombre B ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible : $B = \sqrt{300} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{12}$

3) Donner l'écriture scientifique (sous la forme $a\times 10^k$ où $1 \leq a < 10$ et k est un entier relatif) de C : $C = \dfrac{49\times10^3\times6\times10^{-10}}{14\times10^{-2}}$



Dans quelle situation peut-on dire que $a > a^2 > a^3$?

....

Dans quelle situation peut-on dire que $a < a^2 < a^3$?

....

Dans quelle situation peut-on dire que $a > \frac{1}{a}$?

....

Dans quelle situation peut-on dire que $a < \frac{1}{a}$?

....



(Calcul de fractions)

Donner une fraction égale à la somme : $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.



(Simplifications sur les puissances)

1) Simplifiez les expressions suivantes ...

$A=\left(2^3\times2^{-4}\right)^2\times(3^3)^2\times3^{-5}$

$B=2^3\times2^4\times2^{-5}$

$C=\left(2^3\times3^2\right)^2$

$D=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times3^3$

$E=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times5^{-2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$

$F=\left(\frac{2}{7}\right)^4\times\left(\frac{7}{4}\right)^2\times\left(\frac{-49}{2}\right)^3$

$G=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$

2) Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^n\times5^m$ où n et m désignent des entiers relatifs.

$a=\frac{2^4}{10^5}\ b=\frac{25^3}{5^{-3}}\ c=\frac{\left(10^2\right)^3}{2^6\times5^6}\ d=\frac{125^3}{5^{-5}}\ e=\frac{\left(10^{-2}\right)^3}{2^6\times5^6}$.

3. Simplifier en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible (on donnera le résultat sous la forme a^nb^m où n et m sont des entiers relatifs) :

$A=\frac{12^5\times35^{-2}}{49^{-3}\times21^4\times2^{10}}$; $B=\frac{a^6b^{-4}}{a^{10}b^{-8}}$ $(a\neq0, b\neq0)$.

8 APPLIQUER

(Simplifications de racines carrées)

1) Simplifiez les expressions suivantes :

$A=\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{108}$

$B=\sqrt{256}\times\sqrt{121}+\sqrt{144}$

$C=3\sqrt{169}+\sqrt{361}-3\sqrt{256}$

$D=2\sqrt{44}-\sqrt{99}+2\sqrt{275}$

$E=\sqrt{175}-\sqrt{448}+\sqrt{63}$

$F=4\sqrt{80}-3\sqrt{180}+3\sqrt{45}$

$G=2\sqrt{32}+3\sqrt{18}-3\sqrt{50}$

$H=\sqrt{\frac{8}{9}}\times\sqrt{\frac{12}{25}}\times\sqrt{\frac{225}{24}}$

$I=\sqrt{36}-3\sqrt{6}+5\sqrt{144}$

$J=\sqrt{\frac{45}{7}}\times\sqrt{\frac{26}{30}}\times\sqrt{\frac{27}{13}}$

$K=\sqrt{99}-\sqrt{539}+\sqrt{44}$

$L=\sqrt{7}-3\sqrt{49}+5\sqrt{9}$

2) Simplifiez les expressions suivantes :

$\sqrt{108}$; $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt{9t^2-4t^2}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{(-7)^2}$; $\sqrt{(4a^2+25a^2)}$.

3. Simplifiez les quotients suivants (écrire B, C, J et L avec un dénominateur entier)

$B=\frac{2}{\sqrt{33}}\left(\frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2}-1}\right)$ $C=\frac{3\sqrt{360}-2\sqrt{180}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$ $J=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$ $L=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2}$

9 S'ENTRAINER

1) Simplifier $a=\frac{16.10^{-8}.81.10^{-5}}{2{,}43.10^3.256.10^{-12}}$.

2) Combien vaut 2^{10} ? Donner un ordre de grandeur de 2^{30}, 2^{64}. Combien de chiffres au moins sont-ils nécessaires pour écrire 2^{64} ?

3) Soient a=72,51.10^{-5} , b = 0,2386.10^{4} et c = 135,32.10^{-7} .

Ecriture scientifique de a, b et c. Donner un ordre de grandeur de $\frac{ab}{c}$.

4) Calculer $a = \left(\frac{2}{9}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}\right)$.

5) Un cm^3 d'air pèse 1,29.10^{-3} g. Quelle est la masse d'air contenue dans une pièce de 4m sur 4,5m sur 2,5m ?

Un cm^3 de plomb pèse environ 50 g. Quel serait le volume de plomb dont la masse serait identique à l'air contenu dans la pièce ? Quel est le plus lourd ? L'air ou le plomb.



10 S'ENTRAINER

(Valeurs absolues)

Calculer les valeurs absolues suivantes : $|6\pi - 19|$, $|5\sqrt{5} - 8\sqrt{2}|$.

Donner la valeur exacte en justifiant.



11 S'ENTRAINER

(Encadrements)

1) à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée par excès de $\frac{5}{21}$ à 10^{-3} près. Justifier votre réponse à l'aide d'un encadrement.

2) Donner un encadrement de $-\sqrt{3}$ d'amplitude 0,5 .

3) Donner l'approximation décimale par excès d'ordre 5 de $\sqrt{5}$.

4) Déduire de l'encadrement de $\sqrt{7}$ suivant $2,6 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$ un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

12 S'ENTRAINER

(Encadrements)

1) Soients x et y deux nombres réels tels que $3,5 < x < 3,6$ et $-2,5 < y < -2,4$. Encadrer les nombres suivants :

a) $3x + 2$ b) $\frac{1}{3x+2}$ c) $5 - 2x$ d) $-y\,x$ e) xy

2) Soient x et y deux nombres réels tels que $-3,5 < x < -3,4$ et $2,5 < y < 2,6$. Encadrer les nombres suivants :

a) $4y + 3$ b) $\frac{1}{4y+3}$ c). $7 - 3y$ d) $-xy$ e) xy



SE PERFECTIONNER

(Inégalités)

1) Choisir deux nombres strictement positifs et vérifier que le quotient de leur produit par leur somme est inférieur au quart de cette somme.

2) Ce qui a été constaté sur un exemple est toujours vrai.

En effet : démontrer que si $a > 0$ et si $b > 0$ alors on a : $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

3) En déduire que si $a>0$, $b>0$ et $c>0$ alors $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.



SE PERFECTIONNER

(Nature d'un nombre)

Quelle est la nature du nombre $A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10-3\sqrt{11}} + \frac{1}{10+3\sqrt{11}}}}$?



VRAI-FAUX

1. FAUX : il peut l'être. 1 est un décimal $\left(1=\frac{1}{10^0}\right)$ et il est entier.

2. VRAI: Un décimal $d=\frac{a}{10^n}$ est un rationnel $\left(\frac{a}{b}\right)$.

3. VRAI: Tout nombre est réel (jusqu'en Terminale S...).

4. FAUX: Puisqu'un entier est rationnel $\left(n=\frac{n}{1}\right)$.

5. VRAI: Bien sûr $\left(n=\frac{n}{10^0}\right)$.

6. FAUX: Si un entier n est positif, son opposé $-n$ est négatif.

7. FAUX: 3 est un entier mais son inverse $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

8. FAUX: $a-b$ et $b-a$ sont deux nombres opposés.

9. VRAI: l'inverse d'un rationnel $\frac{p}{q}$ non nul est un rationnel $\frac{q}{p}$.

2 VRAI-FAUX

	Vrai	Faux
Il revient au même d'augmenter le prix d'un article de 20% puis de 30% que de l'augmenter de 30% puis de 20%.		x
Pour augmenter un prix de 20,6% on le multiplie par 1,206.	x	
54% de 40 euros font 21 euros et soixante cents.	x	
Quand on augmente de 17%, puis, diminue de 17%, on ne change rien.		x
Un Compteur EDF sous estime de 20% la consommation. Quand on lit 1300 kW, la consommation réelle est de 1625 kW.		x
Pour diminuer de 27%, on multiplie par 0,73	x	
43 020 euros représente 31% du salaire d'un riche homme d'affaire. Il gagne donc 133 362 euros.		x
Il revient au même d'augmenter le prix d'un article de 20% puis de le baisser de 15% que de le baisser de 15% puis de l'augmenter de 20%.		x
Pour augmenter de 8%, on multiplie par 1,8.		x
Une balance exagère de 20%. On pèse de la farine et on lit 160 g. Il y a en fait 128 g de farine.	x	
Augmenter de 23% puis de 5%, c'est augmenter de 28%.		x



APPLIQUER

$$A=\frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=a^{-2}\times b^2\times c\ ;$$

$$B=a^5\left(bc\right)^2\times\frac{1}{\left(a^3b\right)^2}=a^{-1}\times c^2\ ;$$

$$C=\frac{ab^2}{ca^{-2}}=a^3\times b^2\times c^{-1}\ ;$$

$$D=\left(a^3b^{-5}\right)^2=a^6\times b^{-10}.$$

4 APPLIQUER

$$A=\frac{\frac{9}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}\times\frac{7}{1}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{28}{3}}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{28}$$

$$=\frac{7}{28}$$

$$=\frac{7\times1}{7\times4}=\frac{1}{4}.$$

$$B=\sqrt{300}-4\sqrt{3}+3\sqrt{12}$$
$$=\sqrt{100\times3}-4\sqrt{3}+3\sqrt{4\times3}$$
$$=\sqrt{100}\times\sqrt{3}-4\sqrt{3}+3\times\sqrt{4}\times\sqrt{3}$$
$$=10\sqrt{3}-4\sqrt{3}+3\times2\sqrt{3}$$
$$=10\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}$$
$$=\sqrt{3}\,(10-4+6)$$
$$=12\sqrt{3}$$

$$C=\frac{49\times10^3\times6\times10^{-10}}{14\times10^{-2}}=\frac{7\times7\times10^3\times3\times2\times10^{-10}}{7\times2\times10^{-2}}$$
$$=\frac{7\times10^3\times3\times10^{-10}}{10^{-2}}$$
$$=\frac{21\times10^3\times10^{-8}\times10^{-2}}{10^{-2}}$$
$$=21\times10^{3-8}=21\times10^{-5}$$
$$=2,1\times10^1\times10^{-5}$$
$$=2,1\times10^{-4}$$



5 APPLIQUER

Dans quelle situation peut-on dire que $a > a^2 > a^3$?

$a \in]0;1[$

Dans quelle situation peut-on dire que $a < a^2 < a^3$?

$a \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

Dans quelle situation peut-on dire que $a > \frac{1}{a}$?

$a > 1$ ou $a < 1$

Dans quelle situation peut-on dire que $a < \frac{1}{a}$?

$-1 < a < 1$



6 APPLIQUER

Indication : Calculer d'abord $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$. Puis calculer S.

7 APPLIQUER

1) $A = 2^6 \times 2^{-8} \times 3^6 \times 3^{-5} = 2^{-2} \times 3 = \frac{1}{2^2} \times 3 = \frac{3}{4}$

$B = 2^7 \times 2^{-5} = 2^2 = 4$

$C = 2^6 \times 3^4$

$D = \frac{2^2}{3^2} \times 3^4 = 2^2 \times 3 = 12$

$E = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{5^2} \times \frac{3^3}{5^3} = \frac{3}{5^5}$

$F = \frac{2^4}{7^4} \times \frac{7^2}{2^4} \times \left(-\frac{7^6}{2^3}\right) = -\frac{7^4}{2^3}$

$G = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^8} \times \frac{2^2}{3^3} = \frac{3^3}{2^8}$

$a = \frac{2^4}{10^5} = 2^4 \times 2^{-5} \times 5^{-5} = 2^{-1} \times 5^{-5}$

$b = \frac{\left(5^2\right)^3}{5^{-3}} = \frac{5^6}{5^{-3}} = 5^3 = 2^0 \times 5^3$

$c = \frac{2^6 \times 5^6}{2^6 \times 5^6} = 1 = 2^0 \times 5^0$

$d = \frac{\left(5^3\right)^3}{5^{-5}} = 5^9 \times 5^5 = 5^{14} = 2^0 \times 5^{14}$

$e = \frac{10^{-6}}{10^6} = 10^{-12} = 2^{-12} \times 5^{-12}$

2)

$$A = \frac{3^5 \times 4^5 \times 5^{-2} \times 7^{-2}}{7^{-6} \times 3^4 \times 7^4 \times 2^{10}} = \frac{3 \times 4^5 \times 5^{-2}}{2^{10}}$$

$$= \frac{3 \times \left(2^2\right)^5 \times 5^{-2}}{2^{10}} = 3 \times 5^{-2} = \frac{3}{5^2}$$

$B = \frac{b^4}{a^4} = b^4 \times a^{-4}$

8 APPLIQUER

1. $A = 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$B = 16 + 11 + 12 = 39$

$C = 3 \times 13 + 19 - 3 \times 16 = 10$

$D = 4\sqrt{11} - 3\sqrt{11} + 10\sqrt{11} = 11\sqrt{11}$

$E = 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 0$

$F = 16\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

$G = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$H = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{5} \times \frac{15}{2\sqrt{6}} = 2$

$I = 6 - 3\sqrt{6} + 5 \times 12 = 66 - 3\sqrt{6}$

$J = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{2}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{7}}$

$K = 3\sqrt{11} - 7\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = -2\sqrt{11}$

$L = \sqrt{7} - 21 + 15 = \sqrt{7} - 6$

2. $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$; $\sqrt{(-3)^2} = 3$;

$\sqrt{9t^2 - 4t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}|t|$; $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$;

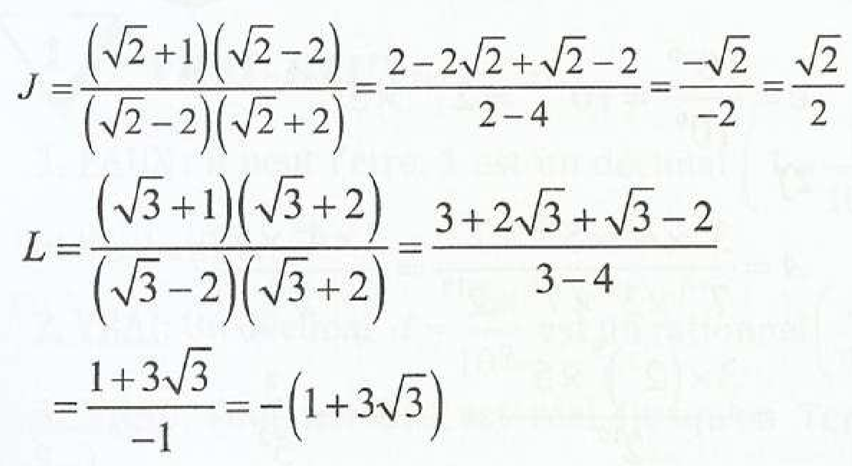
$\sqrt{(-7)^2} = 7$ $\sqrt{25a^2 + 4a^2} = \sqrt{29}|a|$

3. $B = \frac{2}{\sqrt{33}} \times \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{33}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{11}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

$$C = \frac{\sqrt{180}\left(3\sqrt{2} - 2\right)\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{180}\left(3\sqrt{20} + 6 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right)}{10 - 2}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}\left(6\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right)}{8}$$



$$J=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}=\frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{2-4}=\frac{-\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=\frac{3+2\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{3-4}$$

$$=\frac{1+3\sqrt{3}}{-1}=-(1+3\sqrt{3})$$

9 S'ENTRAINER

1) $a=\frac{16\times 81}{2.43\times 256}\times 10^{-4}=2.08\times 10^{-4}$

2) $2^{10}=1024$

$2^{30}=(2^{10})^3$ or on sait que 2^{10} est un ordre de grandeur de 10^3 donc 2^{30} est de l'ordre de $(10^3)^3=10^9$.

$2^{64}=(2^{30})^2\times 2^4$, comme 2^{30} est de grandeur 10^9 donc $(2^{30})^2$ est de grandeur 10^{18} et 2^4 =16 est de grandeur 2×10 ainsi 2^{64} est de grandeur $10^{18}\times 2\times 10=2\times 10^{19}$.

3) $a=72.51\times 10^{-5}=7.251\times 10^{-4}$;

$b=0.2386\times 10^4=2.386\times 10^3$;

$c=1.3532\times 10^{-9}$

$\frac{ab}{c}=\frac{7.251\times 10^{-4}\times 2.386\times 10^3}{1.3532\times 10^{-9}}$

$=\frac{17.3\times 10^{-1}}{1.3532\times 10^{-9}}$

$=12.78\times 10^8$

$10<12.78<20$

donc l'ordre de grandeur de 12.78 est 10 par suite l'ordre de grandeur de $\frac{ab}{c}$ est 10^9.

4) $a=\frac{\frac{4}{18}+\frac{3}{18}}{\frac{5}{12}}=\frac{7}{18}\times\frac{12}{5}=\frac{14}{15}$

5) Le volume de la pièce est : $4\times 4.5\times 2.5=45m^3=45\times 10^6 cm^3$,

6) donc la masse de l'aire est : $45\times 10^6\times 1.29\times 10^{-3}=58.05\times 10^3 g$.

- le volume de plomb est $\frac{58.05\times 10^3}{50}=1.161cm^3$

$1.161<45\times 10^6$ donc le plomb est plus lourd que l'aire

10 S'ENTRAINER

$|6\pi-19|=19-6\pi$ (car $19>6\pi$)

$|5\sqrt{5}-8\sqrt{2}|=8\sqrt{2}-5\sqrt{5}$ (car $8\sqrt{2}>5\sqrt{5}$)

$19-6\pi=19-18.84=0.15$

et $8\sqrt{2}-5\sqrt{5}=11.31-11.18=0.13$

11 S'ENTRAINER

1. $\frac{5}{21}=0.238095238$, donc une valeur approchée par excès de $\frac{5}{21}$ est 0.239 car $0.238<\frac{5}{21}<0.239$.

2. $-\sqrt{3}=-1.732050808$, $-1.8<-\sqrt{3}<-1.3$

3. $\sqrt{5}=2.236067977$, l'approximation décimale à l'ordre 5 de $\sqrt{5}$ par excès est : 2.23607

4. on a : $2.6<\sqrt{7}<2.7$ donc $\frac{1}{2.7}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2.6}$

12 S'ENTRAINER

1) a) 3,5 <x< 3,6 donc $10.5\prec 3x\prec 10.8$ par suite 12.5<3x+2<12.8

b) $\frac{1}{12.8}<\frac{1}{3x+2}<\frac{1}{12.5}$

c) $-3.6<-x<-3.5$ donc $-7.2<-2x<-7$ par suite -2.2<5-2x<-2

d) 2.4<- y<2.5 et 3,5 <x< 3,6 donc 8.4<- xy<9

e) -9< xy<-8.4

2) a) 10<4y<10.4 donc 13<4y+3<13.4

b) $\frac{1}{13.4}<\frac{1}{4y+3}<\frac{1}{13}$

c) 7.5<3y<7.8 donc -7.8<-3y<-7.5 par suite -0.8<7-3y<-0.5

d) -2.6<- y<-2.5 et -3,5 <x< -3,4 donc 8.5<- xy<9.1

e) -9.1<xy<-8.5



SE PERFECTIONNER

1) Par exemple : a=4 et b=6

$\frac{4\times 6}{4+6}=\frac{24}{10}=2.4$ et $\frac{1}{4}(4+6)=\frac{10}{4}=2.5$, 2.4<2.5

2) Soient a et b deux nombres strictement positifs,

on a $4ab\leq(a+b)^2$ en effet

$$(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab$$

$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geq 0$$

Ainsi $\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{4}$.

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{a+b}{4}\Leftrightarrow 4ab=(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2-4ab=0\Leftrightarrow(a-b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

3) D'après ce qui précède on a :

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{a+c}\leq\frac{a+b}{4}+\frac{c+b}{4}+\frac{a+c}{4}$$

$$=\frac{2a+2b+2c}{4}=\frac{a+b+c}{2}$$



SE PERFECTIONNER

$$B=\frac{1}{10-3\sqrt{11}}+\frac{1}{10+3\sqrt{11}}$$

$$=\frac{1\times(10+3\sqrt{11})}{(10-3\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})}+\frac{1\times(10-3\sqrt{11})}{(10+3\sqrt{11})(10-3\sqrt{11})}$$

$$=\frac{10+3\sqrt{11}}{10^2-(3\sqrt{11})^2}+\frac{10-3\sqrt{11}}{10^2-(3\sqrt{11})^2}$$

$$=\frac{10+3\sqrt{11}}{100-99}+\frac{10-3\sqrt{11}}{100-99}$$

$$=10+3\sqrt{11}+10-3\sqrt{11}$$

$$=20.$$

Donc,

$A=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}}{20}$ est irrationnel car 20 n'est pas un carré parfait.

Rapports Trigonométriques d'un angle aigu

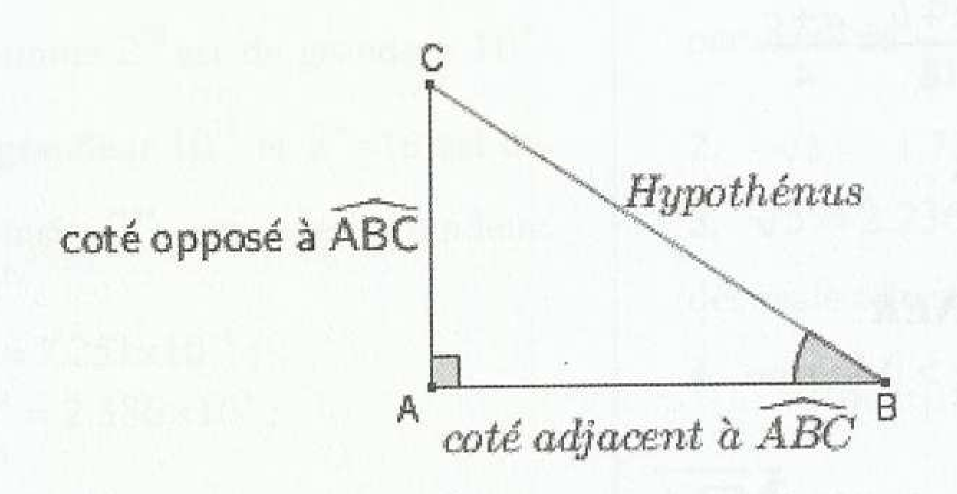
I) Résumé du cours :

- **Cosinus, Sinus et Tangente d'un angle aigu :**

Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le cosinus, sinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ de la manière suivante :

$\text{Sin } \widehat{ABC} = \dfrac{\text{coté Opposé à } \widehat{ABC}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{AC}{BC}$; $\text{Cos } \widehat{ABC} = \dfrac{\text{coté adjecent } \widehat{ABC}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

$\text{Tan } \widehat{ABC} = \dfrac{\text{coté Opposé à } \widehat{ABC}}{\text{coté adjacent à } \widehat{ABC}} = \dfrac{AC}{AB}$



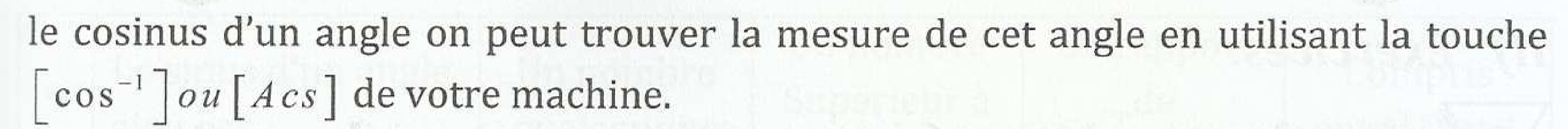
Remarques:

1) on a aussi avec l'angle $\widehat{ACB}$: $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$; $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$.

2) Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont strictement plus grands que 0 et strictement plus petits que 1.

Le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle n'ont pas d'unité

Lorsque l'on connaît le sinus d'un angle on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant la touche $[\sin^{-1}]$ ou $[Asn]$ de votre machine. Exemple : si sinus $\widehat{ABC}$ = 0,8 et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC}$ =53,13 degrés à 0,01 près. Lorsque l'on connaît


le cosinus d'un angle on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant la touche $\left[\cos^{-1}\right]$ *ou* $[Acs]$ de votre machine.

Exemple : si $\cos\widehat{ABC} = 0{,}5$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC}=60$ degrés. Lorsque l'on connaît la tangente d'un angle on peut trouver la mesure de cet angle en utilisant la touche $\left[\tan^{-1}\right]$ *ou* $[Atn]$ de votre machine. Exemple : si $\tan\widehat{ABC} = 0{,}2$ et $\widehat{ABC}$ est un angle aigu alors $\widehat{ABC}=11{,}30$ degrés à 0,01 près. (Conseil : refaites vos même les calculs des exemples ci-dessus).

- ***Relations trigonométriques :***

Il y a trois formules (relations) trigonométriques à connaître (par cœur !) :

1) Dans un triangle rectangle, si α est la mesure d'un angle aigu alors,

$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$. $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

2) Si β est l'autre angle aigu du triangle alors α et β sont complémentaires (leur somme vaut 90°) alors on a : $\boxed{\cos\alpha = \sin\beta}$.

3) grâce à ces formules, si l'on connaît la valeur exacte du cosinus d'un angle, on peut en déduire les valeurs exactes de son sinus, sa tangente, du sinus, cosinus et de la tangente de son angle complémentaire.

- ***Valeurs particulières :***

En choisissant un triangle rectangle adapté aux différentes situations, , retrouver dans le tableau les valeurs exactes suivantes :

Angle $\widehat{\alpha}$	30°	45°	60°
Sinus $\widehat{\alpha}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Cos $\widehat{\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
Tan $\widehat{\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



II) Exercices:



1 Q-C-M

		R1	R2	R3	R4
1	[AC]est le coté adjacent à l'angle aigu $\widehat{BAC}$ dans le triangle…				
2	[BA] est le coté opposé à l'angle aigu $\widehat{BCA}$ dans le triangle…				
3	TGP est un triangle rectangle en P donc…	$\cos\widehat{TGP}=\dfrac{GP}{TP}$	$\sin\widehat{GTP}=\dfrac{GP}{TP}$	$TG^2=TP^2+PG^2$	$\tan\widehat{GTP}=\dfrac{GP}{TP}$
4	$\text{Tan}45°=\dfrac{AB}{7}$ donc…	$AB=7\times\tan45°$	$AB=\dfrac{\tan 45°}{7}$	$AB=\dfrac{7}{\tan 45°}$	$AB\approx 7$
5		$\sin\widehat{OMP}=\dfrac{OM}{OP}$	$\cos\widehat{OPE}=\dfrac{MO}{OP}$	$\tan\widehat{EPO}=\dfrac{OE}{PO}$	$\sin\widehat{OPM}=\dfrac{OE}{OP}$
6	LNT est un triangle rectangle en N, tel que TN=7cm, LN= 5cm, on a donc…	$\widehat{TLN}=\dfrac{5}{7}$	$\widehat{TLN}\approx 45°$	$\tan\widehat{TLN}=1,4$	$\tan\widehat{LTN}\approx 0,7$
7	QRS est un triangle rectangle en R tel que SQ=10cm et RQ=8cm, on a donc…	$\widehat{RSQ}=53°$	$\widehat{RSQ}\approx 37°$	$\widehat{RSQ}=37°$	$\widehat{RSQ}\approx 53°$
8	Le triangle ISO est rectangle et isocèle en S donc…	$OI=SO\times\sqrt{2}$	$\dfrac{OS}{OI}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\widehat{IOS}=1$	$\tan\widehat{OIS}=1$

9	Le sinus d'un angle aigu est...	Un nombre quelconque	Un nombre Superieur à 1	Un rapport de longueurs	Compris entre 0 et 1
10	$\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ sont deux angles complémentaires donc...	Tan $\widehat{x}$ =tan $\widehat{y}$	Cos $\widehat{x}$ = sin $\widehat{y}$	Sin $\widehat{x}$ =cos $\widehat{y}$	Sin $\widehat{x}$ = sin $\widehat{y}$



2 APPLIQUER

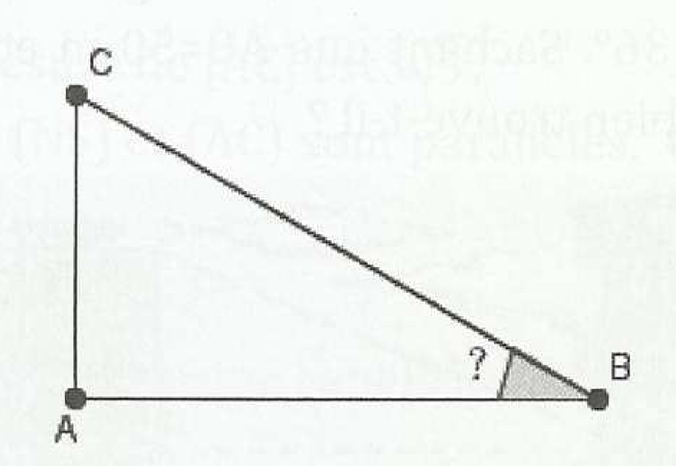
DEF est un triangle rectangle en D tel que $\widehat{DEF} = 30°$ et DF=5. Quelle est la mesure de EF ?



3 APPLIQUER

(Détermination d'un angle):

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=5 et AC=7. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,01 près.





4 APPLIQUER

(Utilisation de formule de trigonométrie) :

Soit x la mesure d'un angle aigu tel que cos x=0,4.

1) calculer la valeur exacte de sinus x.

2) En déduire la valeur exacte de tan x.

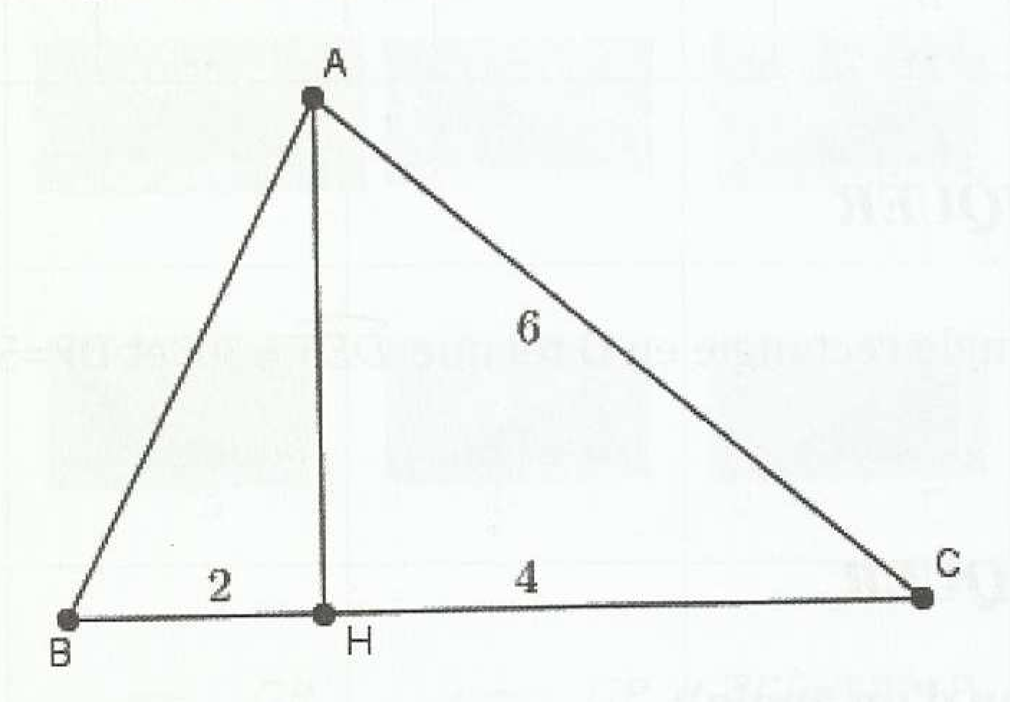


APPLIQUER

(Attention aux approximations):

On donne la figure ci-contre qui n'est pas à l'échelle.

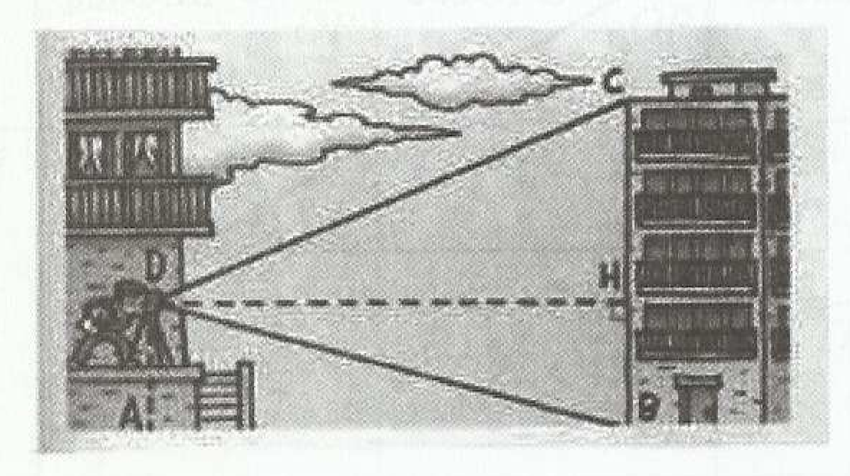
1) calculer HA au millimètre près.
2) calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$ à 0,01 près.





S'ENTRAINER

Pour calculer la hauteur de cet immeuble, un géomètre mesure à l'aide d'un théodolite l'angle et trouve 36°. Sachant que AB=50 m et AD = 6m, il détermine la hauteur de l'immeuble. Combien trouve-t-il ?

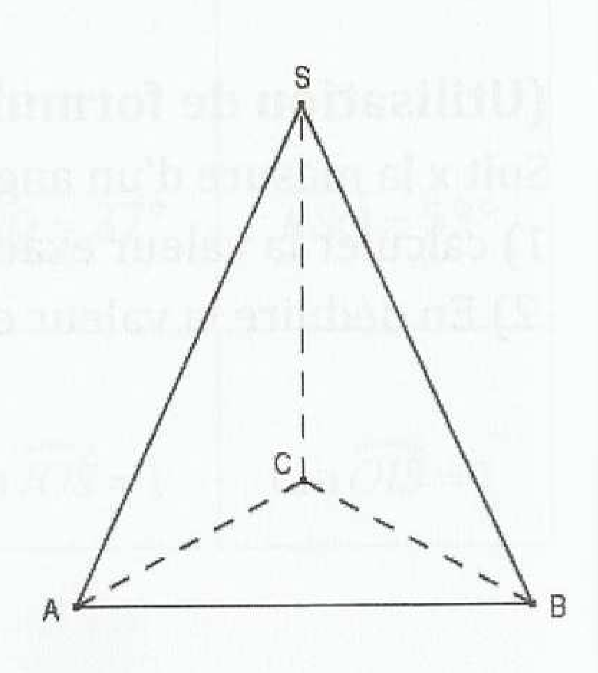




S'ENTRAINER

SABCD est un tétraèdre dont la base est un triangle rectangle et isocèle en C. la hauteur est l'arête [SC] ,SC =3cm, CA=CB=4cm.

1) Calculer la longueur SA.
2) Calculer l'angle $A\hat{S}B$ à un degré près.
3) Réaliser un patron de cette pyramide.

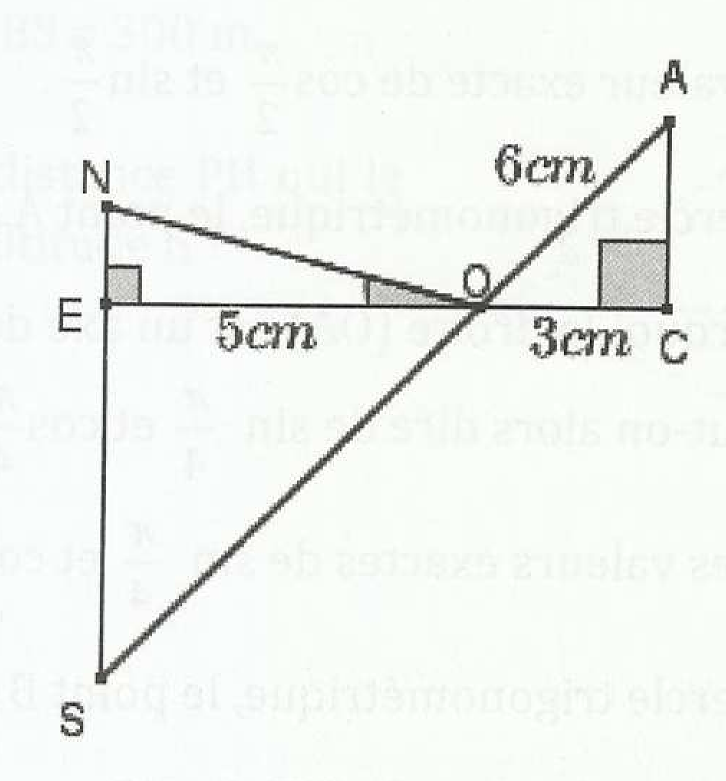




S'ENTRAINER

On sait que :

- OE=5cm, OC=3cm et OA=6cm.
- Les points E, O et C sont alignés.
- Les triangles ENO et OCA sont rectangles respectivement en E et C. La droite (AO) coupe (NE) en S.



a) Montrer que, en cm, la mesure de [AC] est $3\sqrt{3}$.

b) Montrer que les droites (NS) et (AC) sont parallèles. Calculer les valeurs exactes de OS et de ES.

c) calculer ON sachant que $\widehat{NOE} = 30°$.

d) Calculer l'angle $\widehat{COA}$. Démontrer que l'angle $\widehat{SON}$ est droit.



SE PERFECTIONNER

On complétera au fur et à mesure le tableau suivant qui permettra de connaître quelques valeurs remarquables du sinus et du cosinus du nombre réel.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x					
Cos x					

1) a) Reproduire le tableau et construire, dans un repère orthonormé (O, I, J), un cercle trigonométrique.

b) Expliquer pourquoi le cosinus et le sinus des réels proposés sont toujours positifs ou nuls.

2) Donner la valeur exacte de cos0 et de sin0. Expliquer.

3) a) Sur ce cercle trigonométrique, ou se trouve le point associé au réel $\frac{\pi}{2}$?

b) On déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$.

4) a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point A associé au réel $\frac{\pi}{4}$.

b) Expliquer pourquoi la droite (OA) est un axe de symétrie du quart de cercle $\widehat{IJ}$ de centre O. Que peut-on alors dire de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$?

c) Déduire alors les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$.

5) a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point B associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

b) Quelle est la nature du triangle OIB. Justifier.

c) La hauteur issue de B au triangle OIB coupe [OI] en H. Quelles sont les coordonnées du point H ? En déduire la valeur exacte de OH.

d) Démontrer que H est le milieu [OI]. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{3}$.

e) En utilisant le même propriété qu'a la question 4)c. donner la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{3}$.

6) a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point C associé au réel $\frac{\pi}{6}$.

b) calculer $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$.En déduire la symétrique de C par rapport à (OA).

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$.

d) Compléter alors le tableau.



SE PERFECTIONNER

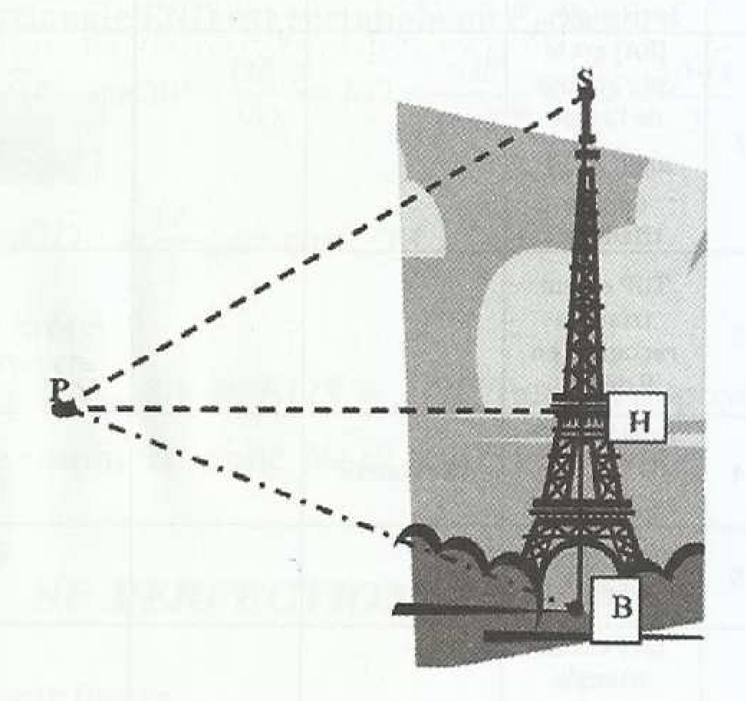
Le pilote P voit le sommet de la tour S sous un angle $\widehat{SPH}$ = 45° par rapport à l'horizontale.

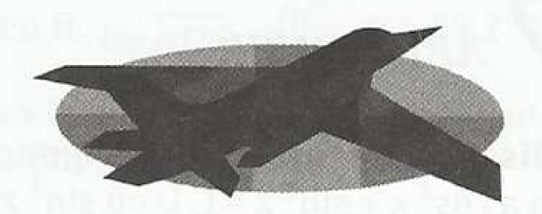
Il voit le bas de la tour B sous un angle $\widehat{BPH} = 30°$

Il sait que la tour a une hauteur BS = 300 m.

Il vole à une altitude fixe.

Le pilote peut-il déterminer la distance PH qui le sépare de la tour ainsi que son altitude h ?









1 Q-C-M

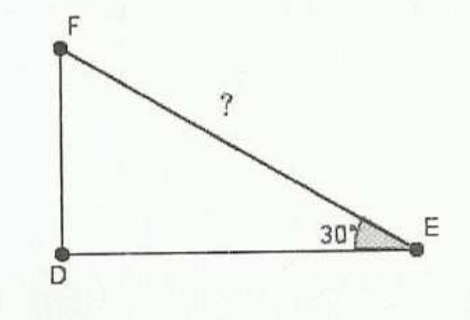
		R1	R2	R3	R4
1	[AC]est le coté adjacent à l'angle aigu $\widehat{BAC}$ dans le triangle...				
2	[BA] est le coté apposé de l'angle aigu $\widehat{BCA}$ dans le triangle...				
3	TGP est un triangle rectangle en P donc...			$TG^2 = TP^2 + PG^2$	$\tan\widehat{GTP} = \frac{GP}{TP}$
4	Tan45°= $\frac{AB}{7}$ donc...	AB=7tan45°			AB≈7
5					$\sin\widehat{OPM} = \frac{OE}{OP}$
6	LNT est un triangle rectangle en N, tel que TN=7cm, LN= 5cm, on a donc...			$\tan\widehat{TLN} = 1,4$	$\tan\widehat{LTN} \approx 0,$
7	QRS est un triangle rectangle en R tel que SQ=10cm et RQ=8cm, on a donc...				$\widehat{RSQ} \approx$ 53°
8	Le triangle ISO est rectangle et isocèle en S donc...	$OI = SO \times \sqrt{2}$	$\frac{OS}{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\widehat{IOS} = 1$	$\tan\widehat{OIS} = 1$
9	Le sinus d'un angle aigu est...			Un rapport de longueurs	compris entre 0 et 1
10	$\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ sont deux angles complémentaires donc...		$\cos\widehat{x} = \sin\widehat{y}$	$\sin\widehat{x} = \cos\widehat{y}$	

2 APPLIQUER

DEF est triangle rectangle en D

$\sin\widehat{DEF} = \frac{DE}{DF}$ donc sin 30= $\frac{DE}{5}$ signifie DE=5×sin30

DE = 2,5





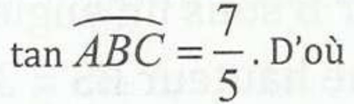
3 APPLIQUER

(Détermination d'un angle) :

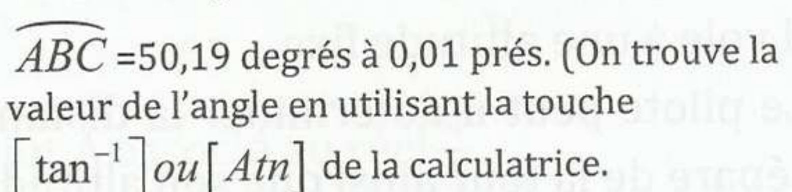
ABC est un triangle rectangle en A.

$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ signifie

$\tan\widehat{ABC} = \frac{7}{5}$. D'où



$\widehat{ABC}$ =50,19 degrés à 0,01 prés. (On trouve la valeur de l'angle en utilisant la touche $\left[\tan^{-1}\right] ou \left[Atn\right]$ de la calculatrice.





4 APPLIQUER

(Utilisation de formule de trigonométrie) :

1) On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. D'où $\sin^2 x + (0,4)^2 = 1$. $\sin^2 x + 0,16 = 1$. $\sin^2 x = 0,84$. $\sin x = -\sqrt{0,84}$ ou $\sin x = \sqrt{0,84}$. Or le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1 donc sin x= $\sqrt{0,84}$.

2) on a tan x = $\frac{\sin x}{\cos x}$. tan x = $\frac{\sqrt{0,84}}{0,4} = \sqrt{\frac{84}{100}} \times \frac{1}{0,4}$.

tan x = $\frac{2\sqrt{21}}{10} \times \frac{1}{0,4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

5 APPLIQUER

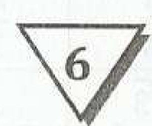
(Attention aux approximations) :

1) AHC est un triangle rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on $AC^2 = HA^2 + HC^2$. D'où $6^2 = HA^2 + 4^2$. $36 = HA^2 + 16$.

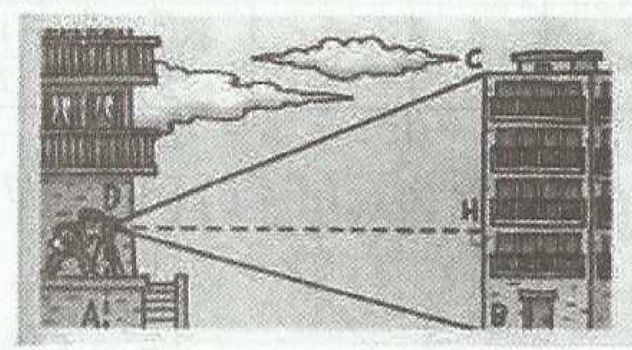
$HA^2 = 20$. HA= $\sqrt{20}$. HA≈ 4,5 au mm près.

2) ABH est un triangle rectangle en H. donc $\tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{20}}{2}$ (il faut absolument prendre la valeur exacte de AH même si on a demandé la valeur approché dans la question précédente. Il faut toujours éviter, si cela est possible, de faire des calculs avec des approximations.) . $\widehat{ABH} \approx 65,91$ degré à 0,1 près.(si nous n'avions pas garder $\sqrt{20}$

mais pris la valeur approchée 4,5 nous aurions trouver 66,04).



6 S'ENTRAINER



Dans le triangle HBD rectangle en H, DH =AB=50m, HB =AD=6m. $\tan\widehat{HBD} = \dfrac{HB}{DH}$, $\tan\widehat{HBD} = \dfrac{50}{6} = 6,8°$,

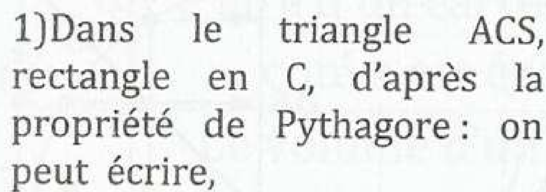
donc $\widehat{HDC} \simeq 36 - 6,8 = 29,2°$;Dans le triangle CDH rectangle en H. $\tan\widehat{HDC} = \dfrac{HC}{HD}$, $\tan 29,2° = \dfrac{HC}{50}$,

HC=50 × tan 29,2° , HC = 27,9m. Et la hauteur de l'immeuble fait environ 34m.



7 S'ENTRAINER

SABCD est un tétraèdre dont la base est un triangle rectangle et isocèle en C. la hauteur est la arête [SC], SC =3cm, CA=CB=4cm.



1)Dans le triangle ACS, rectangle en C, d'après la propriété de Pythagore : on peut écrire,

$AS^2 = AC^2 + CS^2$.

$AS^2 = 4^2 + 3^2$, $AS^2 = 25$, AS =5. (AS est une longueur et ne peut-être que positive !). $\tan\widehat{SAC} = \dfrac{SC}{CA}$.

2) Dans le triangle ACS, rectangle en C, $\tan\widehat{SAC} = \dfrac{3}{4}$,

$\widehat{SAC} \simeq 37°$.

L'angle mesure 37°au degré prés par excès.

3) réaliser un patron de cette pyramide.



8 S'ENTRAINER

a) le triangle OAC est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 \Rightarrow AC^2 = OA^2 - OC^2$$

$= 36 - 9 = 27$ donc $OA = 3\sqrt{3}$

b) on a (AC) ⊥ (EC) et (NS) ⊥ (EC) donc (AC)//(NS).

D'après le théorème de Thalès on a : $\dfrac{OA}{OS} = \dfrac{OC}{OE} = \dfrac{AC}{ES}$

$$\frac{OA}{OS} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow OS = \frac{OA \times OE}{OC} = \frac{6 \times 5}{3} = 10cm$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{AC}{ES} \Rightarrow ES = \frac{OE \times AC}{OC} = \frac{5 \times 3\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}cm$$

c) le triangle END est rectangle en E, donc :

$$\cos N\hat{O}E = \cos 30° = \frac{OE}{NO} \Leftrightarrow NO = \frac{OE}{\cos 30°} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

d) $\cos C\hat{O}A = \dfrac{OC}{AO} \Leftrightarrow \cos C\hat{O}A = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ donc

$C\hat{O}A = 60°$.

On a $E\hat{O}N = 30°$ et $E\hat{O}S = A\hat{O}C$ (angles opposée par le sommet) donc $N\hat{O}S = 30° + 60° = 90°$



9 SE PERFECTIONNER

1)a) voir figure

b) pour $x \in [0 ; \dfrac{\pi}{2}]$,

Le point M associé sur l'arc violet (IJ), ses coordonnées sont donc compris entre 0 et 1, donc positives.

2) le réel 0 est associé au point I(1 ;0)

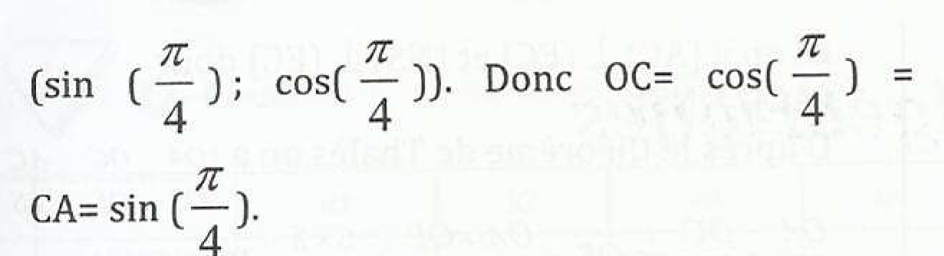
donc sin(0) =0 et cos(0) =1 .

3)a) Sur le cercle, le réel $\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point J.

b) J(1 ;0) donc $\sin(\dfrac{\pi}{2})=0$ et $\cos(\dfrac{\pi}{2})=1$ 4.a Sur le cercle le réel $\dfrac{\pi}{4}$ est associé au point A. b. $\dfrac{\pi}{4}$ est la moitié de $\dfrac{\pi}{2}$ donc (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ c'est-à-dire l'axe de symétrie du quart de cercle (IJ) de centre O. on peut donc en déduire que sin $(\dfrac{\pi}{4})$= cos$(\dfrac{\pi}{4})$ car A est équidistant des droites (OI) et (OJ).

c) Le triangle OCA est rectangle en C, les coordonnées de A sont positives et valent :




(sin $(\frac{\pi}{4})$; cos$(\frac{\pi}{4})$). Donc OC= cos$(\frac{\pi}{4})$ = CA= sin $(\frac{\pi}{4})$.

Avec le théorème de Pythagore :

$OA^2 = OC^2 + CA^2$,

$1 = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})$, $1 = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \cos^2(\frac{\pi}{4})$,

$1 = 2\cos^2(\frac{\pi}{4})$, $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$,

Donc $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5)a) voir figure.

b) OIB est équilatéral car isocèle, OI=OB=1 et le réel $\frac{\pi}{3}$ est le tiers du demi cercle de longueur π, donc l'angle correspondant (OIB) vaut 60°. Un triangle isocèle ayant un ongle 60° est équilatéral.

c) H (0,5 ; 0) donc OH=1/2.

d) OI=1 donc H est le milieu de [OI], et donc $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$.

e)calcul de $\sin\frac{\pi}{3}$:

on a la relation : $\cos^2(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$

donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$, ainsi $\frac{1}{4} + \sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1$

et $\sin^2(\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, Or $\sin(\frac{\pi}{3}) \geq 0$ donc

$\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) a) voir figure.

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ donc le symétrique de C par rapport à la droite (OA) est le point B.

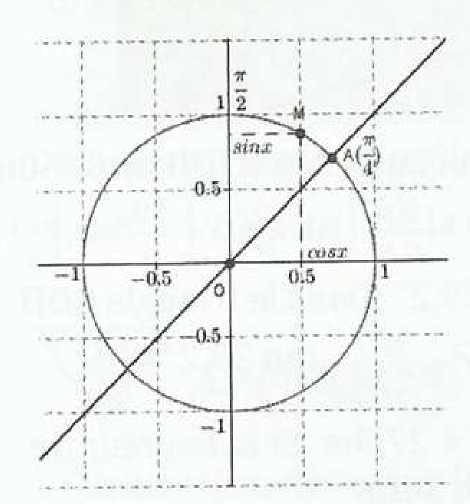
c) $x_C = y_B$ et $y_C = x_B$ c'est-à-dire

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) on rempli le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Figure1 *Figure2*



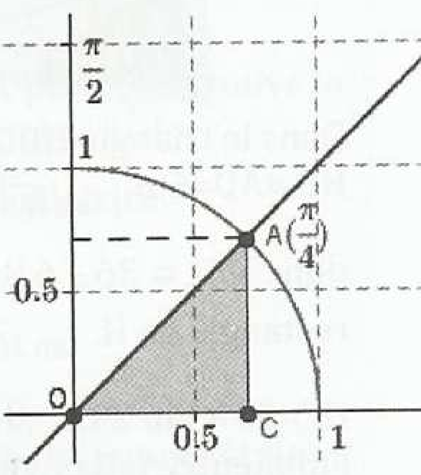
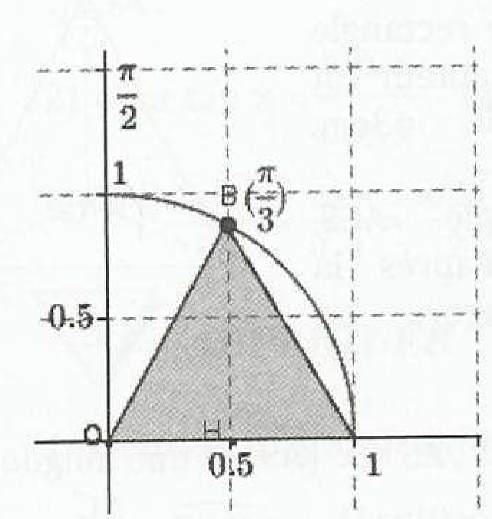
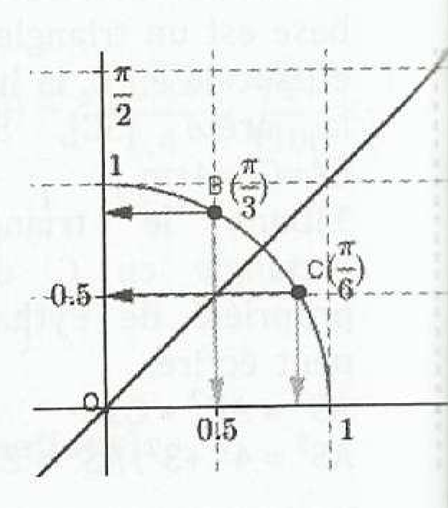


Figure3 *figure4*





Activités algébriques

I) Résumé de cours

- ✦ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (2a s'appelle le double produit)
- ✦ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2a s'appelle le double produit)
- ✦ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ (appelée différence de deux carrés)

II) Exercices :



Q-C-M

Pour chaque ligne du tableau trois réponse sont proposées, mais une seule est exacte, indiquer la.

		R1	R2	R3
1	l'expression développée de 2x (2x-3) est :	$2x^2-6x$	$4x^2-3$	$4x^2-6x$
2	l'expression factorisée de x^2-64 est :	(x-64)(x+64)	(x-8)(x+8)	$(x-64)^2$
3	L'aire d'un carré ABCD de coté x est égale à :	4x	x^2	2x
4	Le volume d'un cube de coté x+3 est égale à :	$(x+3)^3$	$(x+3)^2$	$(x+3)$



Q-C-M

Cocher la bonne réponse

1) $3a(2a-3b+c) =$

a) $6a^2-9ab+3ac$ ❑ b) $9a^2+3ab+6a$ ❑ c) $3a^2-4ab+b$ ❑

2) $3xy(x-y)+2x(2xy-1)-y(2x^2+1) =$

a) $6x^2y-2x+y-3y^2x$ ❑ b) $5x^2-3xy^2-2x-y$ ❑ c) $5x^2y-3xy^2+2x-y$ ❑

3) $(x+1)(x-2)(x+3)-(x-1)(x+2)(x-3) =$

a) $3x^2-12$ ❑ b) $5x^2-12$ ❑ c) $4x^2-12$ ❑

4) $(x+3y)^2-9y^2=$

a) $x(6x+y)$ ☐ b) $6x(x+y)$ ☐ c) $x(x+6y)$ ☐

5) $(a-b)^2-a^2=$

a) $b(2a-b)$ ☐ b) $-b(2a-b)$ ☐ c) $-b(2a+b)$ ☐

6) $(2x+3yz)^2=$

a) $4x^2+12xyz+9y^2z^2$ ☐ b) $2x^2+6xyz+6y^2z^2$ ☐ c) $4x^2+6xyz+9y^2z^2$ ☐

7) $(2\sqrt{3}+5)^2+(1-\sqrt{5})^2=$

a) $43+20\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ ☐ b) $33+2\sqrt{3}-20\sqrt{5}$ ☐ c) $33+18\sqrt{2}$ ☐



3 APPLIQUER

Développer et réduire

a) $(x-3)^2-3x(2x-1)$

b) $(x-2)^2-(2x-2)(2x+2)$

c) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$

d) $(x+2)(x-3)-(x-1)(x+3)$

e) $(x^2+1)(1-x^2+x^4)$

f) $(x-\sqrt{2})(\sqrt{2}-2x)-(\sqrt{2}x+1)^2$

4 APPLIQUER

Factoriser les expressions suivantes

$A=x^2-x+\frac{1}{4}$ $E=4x^2-9+(2x+3)^2$

$B=(2x-5)^2-4$ $F=2(3-x)(x+2)-3(x+2)(4+x)$

$C=x^3-27$ $G=x^2-16+(x+4)^2$

$D=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}$ $H=4(5-x)-(x-5)^2$



5 APPLIQUER

Compléter chacune de ces sommes afin d'obtenir le développement d'un carré à préciser

$A=x^2+2x+\ldots\ldots$ $C=4x^2-20xy+\ldots\ldots$

$B=4a^2-4a+\ldots\ldots$ $D=9x^2-12xy+\ldots\ldots$



On donne l'expression algébrique $A=(3x+1)(4x-3)-(2x+5)^2$

1) Montrer que A peut s'écrire sous la forme développée et réduite $A=8x^2-25x-28$

2) Calculer les valeurs de A pour $x=\frac{1}{3}$ puis $x=\sqrt{5}$.

3) Soit $B=(3x-5)^2-x^2$

a) Développer et réduire B

b) Montrer que $A-B=5x-53$



Soit l'expression $E = 4x^2 - 6x + 2$

1) a) Montrer que $E=\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

b) En déduire une factorisation de E

c) Calculer E pour $x=\frac{1}{2}$

2) a) Montrer que $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

b) Factoriser alors $F = x^2 + 6x - 7$



Soit $A(x)=(x-1)(x+2)-(x-1)(2x+6)$ et $B(x)=(x-3)^2-(2x-4)(x-3)$

1) Calculer A (-2) et B(2)

2) Montrer que $A(x)= -x^2 - 3x + 4$ et $B(x) = -x^2 + 4x - 3$

3) Factoriser A(x) et B(x) et A(x) + B(x)



Soit $A = 2(3x - 1)^2 - 3x(9x^2 - 1) + 9x^2(3x - 1)$

1) a) Factoriser A

b) Développer puis réduire A.

Soit $E = x^3-27-2x^2+12x-18$ et $F = (x - 3)(x - 8)$

2) a) Factoriser E et développer F.

b) Factoriser au maximum E + F.



S'ENTRAINER

$F(x) = x^2 - 4x - 5$

1) a) Montrer que $F(x) = (x-2)^2 - 9$

b) Factoriser alors F(x) et déduire les valeurs du réels x tel que F(x) = 0

2) Soit $G(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$

a) Développer $(x-2)^3$ et déduire que $G(x) = (x-2)^3 - 8$.

b) Factoriser alors G(x)



S'ENTRAINER

Soit a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$

1) Montrer que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2$

2) Montrer que $a^6 + b^6 + 3a^2b^2 = 1$



S'ENTRAINER

On donne quatre réels a, b, c et d tel que $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.

Montrer que $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = 1$.



SE PERFECTIONNER

On donne trois réels a, b et c tel que $a+b+c \neq 0$ et $b+c-a \neq 0$.

Montrer que $\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \dfrac{1}{b+c-a} \times \dfrac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c} = 1$



1 Q-C-M

$2x\,(2x-3)=4x^2-6x$ donc la réponse est R3

1) $x^2-64=x^2-8^2=(x-8)(x+8)$ donc la réponse est R2

2) L'aire du carré ABCD est $x\times x=x^2$ donc la réponse est R2

3) Le volume de cube est $(x+3)^3$



2 Q-C-M

1) $3a(2a-3b+c)=6a^2-9ab+3ac$ donc c'est la réponse a)

2) $3xy(x-y)+2x(2xy-1)-y(2x^2+1)$
$=3x^2y-3xy^2+4x^2y-2x-2x^2y-y$
$=5x^2y-3xy^2-2x-y$ donc c'est la réponse b)

3) $(x+1)(x-2)(x+3)-(x-1)(x+2)(x-3)$
$=(x^2-2x+x-2)(x+3)-(x^2+2x-x-2)(x-3)$
$=(x^2-x-2)(x+3)-(x^2+x-2)(x-3)$
$=(x^3+3x^2-x^2-3x-2x-6)$
$-(x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6)$
$=x^3+2x^2-5x-6-x^3+2x^2+5x-6$
$=4x^2-12$ donc c'est la réponse c)

4) $(x+3y)^2-9y^2=$
$(x+3y-3y)(x+3y+3y)=x\,(x+6y)$
donc c'est la réponse c)

5) $(a-b)^2-a^2=$
$(a-b-a)(a-b+a)=-b\,(2a-b)$
donc c'est la réponse b)

6) $(2x+3yz)^2=4x^2+12xyz+9y^2z^2$
donc c'est la réponse a)

7) $\left(2\sqrt{3}+5\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^2=$
$12+20\sqrt{3}+25+1-2\sqrt{5}+5=43+20\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ donc c'est la réponse a)



3 APPLIQUER

a) $(x-3)^2-3x\,(2x-1)$
$=x^2-6x+9-6x^2+3x=-5x^2-3x+9$

b) $(x-2)^2-(2x-2)(2x+2)$
$=x^2-4x+4-4x^2-4x+4x+4=-3x^2-4x+8$

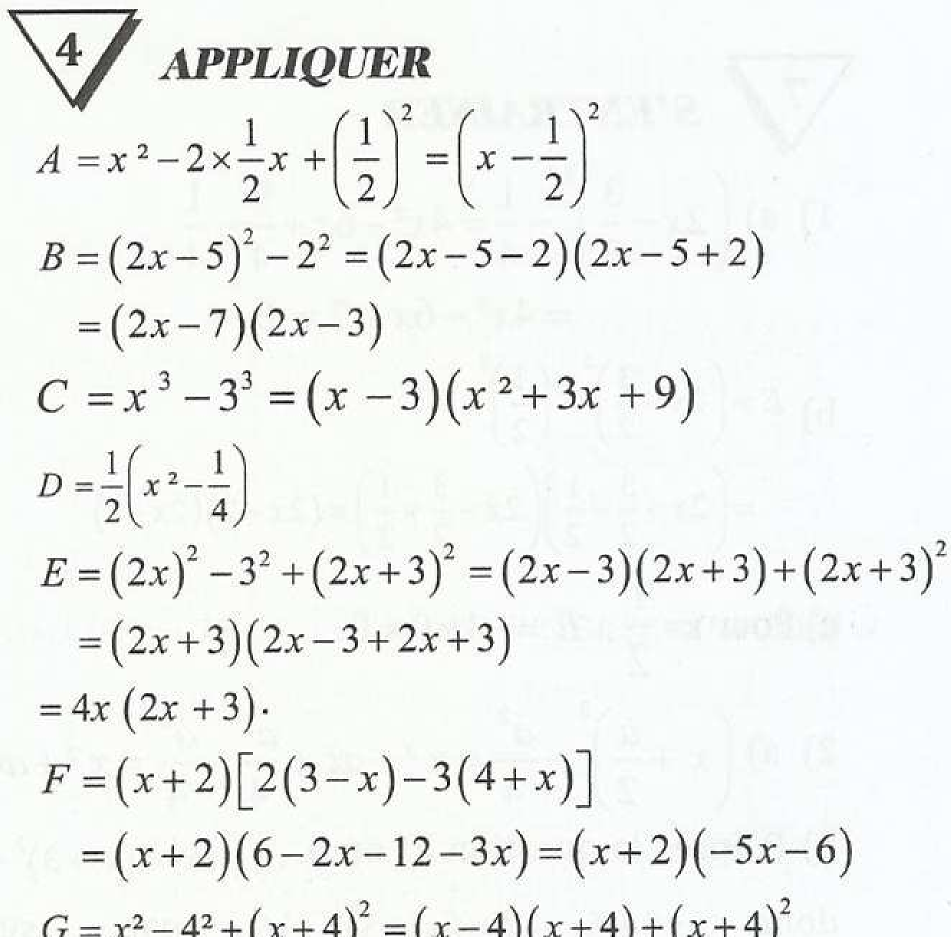
c) $(3x-1)^2-(3x+1)^2$
$=9x^2-6x+1-9x^2-6x-1=-12x$

d) $(x+2)(x-3)-(x-1)(x+3)$
$=x^2-3x+2x-6-x^2-3x+x+3$
$=-3x-3$

e) $(x^2+1)(1-x^2+x^4)$
$=x^2-x^4+x^6+1-x^2+x^4=x^6+1$

f) $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-2x\right)-\left(\sqrt{2}x+1\right)^2$
$=\sqrt{2}x-2x^2-2+2\sqrt{2}x-2x^2-2\sqrt{2}x-1$
$=-4x^2+\sqrt{2}x-3$

4 APPLIQUER



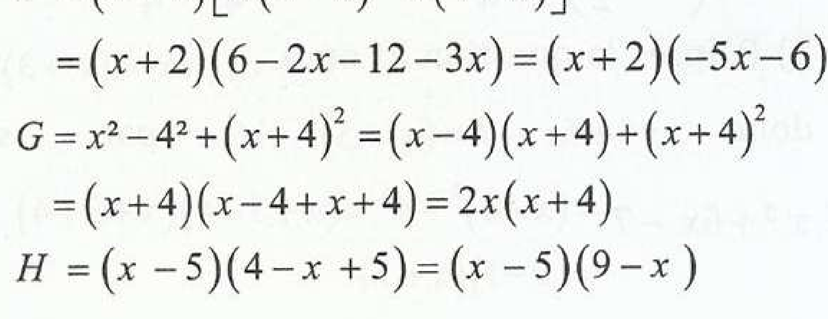
$A=x^2-2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

$B=(2x-5)^2-2^2=(2x-5-2)(2x-5+2)$
$=(2x-7)(2x-3)$

$C=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$

$D=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$

$E=(2x)^2-3^2+(2x+3)^2=(2x-3)(2x+3)+(2x+3)^2$
$=(2x+3)(2x-3+2x+3)$
$=4x\,(2x+3)\cdot$



$F=(x+2)\left[2(3-x)-3(4+x)\right]$
$=(x+2)(6-2x-12-3x)=(x+2)(-5x-6)$

$G=x^2-4^2+(x+4)^2=(x-4)(x+4)+(x+4)^2$
$=(x+4)(x-4+x+4)=2x(x+4)$

$H=(x-5)(4-x+5)=(x-5)(9-x)$



5 APPLIQUER

$A=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$B=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$

$C=4x^2-20xy+25y^2=(2x-5y)^2$

$D=9x^2-12xy+16y^2=(3x-4y)^2$



APPLIQUER

1) $A=(3x+1)(4x-3)-(2x+5)^2$
$=12x^2-9x+4x-3-4x^2-20x-25$
$=8x^2-25x-28$

2) Pour $x=\frac{1}{3}$,

$A=8\times\frac{1}{9}-25\times\frac{1}{3}-28=\frac{8}{9}-\frac{75}{9}-\frac{252}{9}=-\frac{319}{9}$

Pour $x=\sqrt{5}$, $A=8\times5-25\times\sqrt{5}-28=12-25\sqrt{5}$

3) $B=(3x-5)^2-x^2$

a) $B=9x^2-30x+25-x^2=8x^2-30x+25$

b) $A-B=8x^2-25x-28-8x^2+30x-25$
$=5x-53$



S'ENTRAINER

1) a) $\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=4x^2-6x+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}$
$=4x^2-6x+2=E$

b) $E=\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$=\left(2x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=(2x-2)(2x-1)$

c) Pour x= $\frac{1}{2}$, $E=-1\times0=0$.

2) a) $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=x^2+ax$

b) D'après la question a) on a $x^2+6x=(x+3)^2-9$ donc $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$ par suite $x^2+6x-7=(x+3)^2-4^2=(x+3-4)(x+3+4)$.
$=(x-1)(x+7)$



S'ENTRAINER

1) A (-2)=6 et B(2) = 1

2) $A(x)=(x-1)(x+2)-(x-1)(2x+6)$
$=x^2+2x-x-2-2x^2-6x+2x+6$
$=-x^2-3x+4$
$B(x)=(x-3)-(2x-4)(x-3)$
$=x^2-6x+9-2x^2+6x+4x-12$
$=-x^2+4x-3$

3) $A(x)=(x-1)(x+2-2x-6)=(x-1)(-x-4)$
$B(x)=(x-3)(x-3-2x+4)=(x-3)(-x+1)$
$A(x)+B(x)=(x-1)(-x-4)+(x-3)(-x+1)$
$=(x-1)(-x-4-x+3)=(x-1)(-2x-1)$

9 S'ENTRAINER

1) a)
$A=2(3x-1)^2-3x(3x-1)(3x+1)+9x^2(3x-1)$
$=(3x-1)\left[2(3x-1)-3x(3x+1)+9x^2\right]$
$=(3x-1)(6x-2-9x^2-3x+9x^2)$
$=(3x-1)(3x-2)$

b)
$A=(3x-1)(3x-2)=9x^2-6x-3x+2=9x^2-9x+2$

2) a) $E=x^3-27-2x^2+12x-18$
$=x^3-3^3-2(x^2-6x+9)$
$=(x-3)(x^2+3x+9)-2(x-3)^2$
$=(x-3)(x^2+3x+9-2(x-3))$
$=(x-3)(x^2+x+15)$
$F=(x-3)(x-8)=x^2-8x-3x+24=x^2-11x+24$

b) $E+F=(x-3)(x^2+x+15)+(x-3)(x-8)$
$=(x-3)(x^2+x+15+x-8)$
$=(x-3)(x^2+2x+7)$

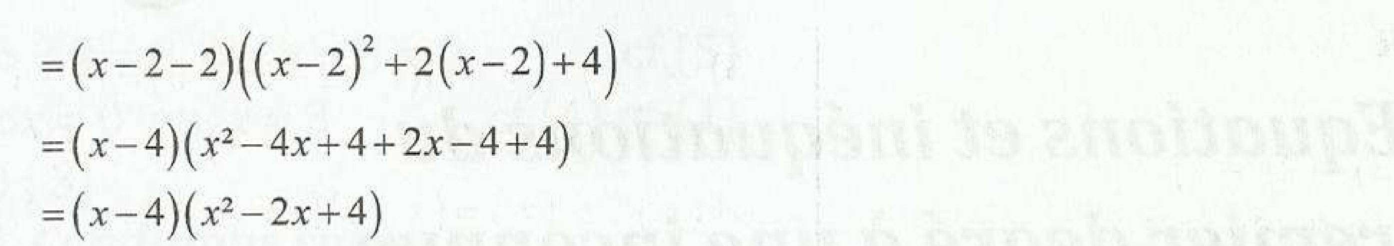
10 S'ENTRAINER

1) a) $(x-2)^2-9=x^2-4x+4-9=x^2-4x-5=F(x)$

b)
$F(x)=(x-2)^2-3^2=(x-2-3)(x-2+3)=(x-5)(x+1)$
$F(x)=0\Leftrightarrow(x-5)(x+1)=0\Leftrightarrow x-5=0$
ou $x+1=0\Leftrightarrow x=5$ ou $x=-1$.

2) a) $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$
$x^3-6x^2+12x-8-8$
$=x^3-6x^2+12x-16=G(x)$

b) $G(x)=(x-2)^3-8=(x-2)^3-2^3$



$=(x-2-2)\left((x-2)^2+2(x-2)+4\right)$

$=(x-4)(x^2-4x+4+2x-4+4)$

$=(x-4)(x^2-2x+4)$



11 S'ENTRAINER

1) $(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$

$=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)=2$

2) On a $a^2+b^2=1$ donc $a^2=1-b^2$

$a^6+b^6+3a^2b^2=\left(a^2\right)^3+b^6+3a^2b^2$

$=(1-b^2)^3+b^6+3(1-b^2)b^2$

$=1-3b^2+3b^4-b^6+b^6+3b^2-3b^4=1$



12 S'ENTRAINER

$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$

$=(c^2+d^2)(a^2+b^2)=1\times1=1$

13 SE PERFECTIONNER

$$\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{1}{b+c-a}\times\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}=$$

$$\frac{(2bc+b^2+c^2)-a^2}{2bc}\times\frac{1}{b+c-a}\times\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}=$$

$$\frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\times\left[b^2+c^2-(b-c)^2\right]}{2bc\times(b+c-a)\times(a+b+c)}=$$

$$\frac{(b+c-a)(b+c+a)(b^2+c^2-b^2+2bc-c^2)}{2bc\times(b+c-a)\times(a+b+c)}=$$

$$\frac{2bc\times(b+c-a)(b+c+a)}{2bc\times(b+c-a)\times(a+b+c)}=1$$

Equations et inéquations du premier degré à une inconnue

I) Résumé de cours

A) Equations

1) Equivalences

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions et seulement les solutions de cette équation.

C'est la raison pour laquelle nous procéderons toujours par équivalences successives en nous appuyant sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :
- A = B équivaut à $A + C = B + C$ (1)
- A = B équivaut à $A - C = B - C$ (2)
- **Si $C \neq 0$ alors** : A = B équivaut à $AC = BC$ (3)
- **Si $C \neq 0$ alors** : A = B équivaut à $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ (4)
- AB = 0 équivaut à A = 0 ou B = 0 (5)

Exemple:
Résoudre dans IR, (E) : $3x^2 = 9x$

Méthode fausse :
(E) $\Leftrightarrow 3x = 9$ cf (4)
(E) $\Leftrightarrow x = 3$ cf (4)
S = {3}

Equivalence fausse :
On a divisé les 2 membres de (E) par x qui peut être nul !

Méthode juste :
(E) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$ cf (2)
(E) $\Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0$

(E) $\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$ cf (5)
(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ cf (4) et (1)
$S = \{0 ; 3\}$

2) Conditions sur x

Avant de transformer l'équation pour la résoudre, il faut commencer par éliminer les valeurs de x qui sont "interdites" car :

- Elles annulent un dénominateur
- Elles rendent strictement négatif un radicande.

3) Dans les exercices

Exemple	Méthode
Résoudre dans P : (E) $\frac{3x^2}{x+1} = \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$	
Conditions : $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ (3x-2)(x+1) \neq 0 \end{cases}$ signifie $x \neq -1$ et $x \neq \frac{2}{3}$	Avant toute chose, penser aux conditions
(E) équivaut à $\begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (2)	
(E) équivaut à $\begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{2x(3x-2)}{(3x-2)(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$	
(E) équivaut à $\begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$	Ensuite, à chaque étape, penser à l'équivalence et réécrire les conditions
(E) équivaut à $\begin{cases} \frac{3x^2 - 2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$	
(E) équivaut à $\begin{cases} \frac{x(3x-2)}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$	
(E) équivaut à $\begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (3)	**Factoriser** en un **produitnul** …

(E) équivaut à $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (5)

... pour utiliser la propriété : Un **produit** est **nul** ssi l'un des facteurs est nul

(E) équivaut à $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (1) et (4)

(E) équivaut à $x = 0$

$S = \{0\}$

Conclure par S = ...

B) Inéquations

1) Equivalences

Pour être certain de résoudre les inéquations par équivalences successives, nous nous appuierons sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

- A > B équivaut à A + C > B + C (a)
- A > B équivaut à A − C > B − C (b)
- **Si C > 0 alors** : A > B équivaut à AC > BC (c)
  Si C < 0 alors : A > B équivaut à AC < BC
- **Si C > 0 alors** : A > B équivaut à $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ (d)
- **Si C < 0 alors** : A > B équivaut à $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

!Il n'y a pas de propriété simple pour les inéquations produit !

Exemple : ABC < 0 équivaut à (A>0 et B>0 et C<0) ou (A>0 et B<0 et C>0) ou (A<0 et B>0 et C>0) ou (A<0 et B<0 et C<0) !!!!

Il nous faudra donc trouver autre chose : les tableaux de signes...

***Exemple*:** Résoudre dans IR, (I) : $\frac{4}{x} > 1$

Conditions : $x \neq 0$

Méthode fausse :

(I) équivaut à $\begin{cases} 4 > x \\ x \neq 0 \end{cases}$ cf (d)

S =]-∞ ; 0[Y]0 ; 4]

> Equivalence fausse :
> On a multiplié les 2 membres de (I) par x qui peut être soit positif, soit négatif !

Méthode juste :

(I) équivaut à $\begin{cases} \frac{4}{x} - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cf (b)

(I) équivaut à $\begin{cases} \frac{4-x}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

(I) équivaut à $(4 - x > 0$ et $x > 0)$ ou $(4 - x < 0$ et $x < 0)$

(I) équivaut à $(x < 4$ et $x > 0)$ ou $(x > 4$ et $x < 0)$

(I) équivaut à $0 < x < 4$

S =]0 ; 4]

2) Signe d'une expression du 1er degré (ax + b avec a ≠ 0)

a) Exemple : signe de $-2x + 3$

$-2x + 3 > 0$ signifie $-2x > -3$ signifie $x < \frac{3}{2}$

$-2x + 3 < 0$ signifie $-2x < -3$ signifie $x > \frac{3}{2}$

Récapitulons ces résultats dans un "tableau de signe" :

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
$-2x+3$		+	0	−	

b) Propriété

> Dans un tableau de signe :
> "A droite" de $-\frac{b}{a}$ l'expression $ax + b$ est du signe de a.
> "A gauche" de $-\frac{b}{a}$ l'expression est du signe contraire.

3) Dans les exercices

Exemple	Méthode
Résoudre dans IR : (I) $\frac{4(x+1)}{x+3} > x+1$	
Conditions : $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$	Déterminer les conditions
(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4(x+1)-(x+1)(x+3)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(4-x-3)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(1-x)}{x+3} > 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$	**<u>Factoriser en un produit ou un quotient supérieur ou inférieur à zéro</u>**
(tableau de signe ci-dessous)	Faire un **<u>tableau de signe</u>**
$S =]-\infty ; -3[\cup [-1 ; 1]$	Conclure par S = ...

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -3[\cup [-1 ; 1]$

II) Exercices



1 Q-C-M

1) Parmi les équations suivantes, quelle est celle qui n'a pas de solution ?
   a) $2x^2 + 1 = 0$ b) $2(x + 1) = 2x + 2$ c) $x^2 + 8 = 8$
2) Quelle est la solution de l'équation $4x = 0$?
   a) 0,25 b) 0 c) - 4
3) Parmi les équations suivantes, quelle est celle qui a une infinité de solutions ?
   a) $0x = 5$ b) $x - 2 = -x + 2$ c) $3x - 6 = 3(x - 2)$

Quelle est la solution de l'équation $x/2 - 1 = 5$?
   a) 3 b) 6 c) 12

4) Quelles sont les solutions de l'équation $(x + 2)(x - 3) = 0$?
   a) 2 et -3 b) -2 et -3 c) -2 et 3
5) Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = -4x$?
   a) il n'y a pas de solutions b) 0 et -4 c) 0

6) Parmi les inéquations suivantes, quelle est celle qui est équivalente à $x^2 - x < 5x$?
a) $x^2 < 4x$ b) $x^2 - x > -5x$ c) $-x^2 + x > -5x$

7) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x < 0$?
a) $]-\infty ; -0{,}5[$ b) $]0 ; 0{,}5[$ c) $]0 ; +\infty[$

8) Parmi les inéquations suivantes, quelle est celle qui est équivalente à $x > 3$?
a) $0 > x - 3$ b) $-x + 3 > 0$ c) $-2x < -6$

9) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x + 2)(x - 3) < 0$?
a) $]-2 ; +\infty[$ b) $]-\infty ; 3[$ c) $]-2 ; 3[$



2 APPLIQUER

Résoudre dans IR, les équations suivantes :

a) $x + 0{,}6 = 4{,}8$
b) $-2 + x = 5$
c) $-2x = 5$
d) $-3 + x = -9$
e) $-6x = -8$
f) $4x + 5 = 0$
g) $9 - 3x = 0$
h) $4 + 2x = 10 - 4x$
i) $9x - 7 = 3 - 3x + 8$
j) $3x + 1 = 2x - 2$
k) $5x + 10 = 3x + 40$
l) $4 + 2x = 20 - 8x$
m) $2(3x - 1) - 2x = 7x + 3$
n) $10x - 5 - 3(2x + 5) = -20$
o) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$
p) $x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$
q) $2x - \frac{1}{4} = 5x - \frac{7}{4}$



3 APPLIQUER

Résoudre dans IR, les inéquations proposées.

a) $5x \geqslant 10$
b) $8x < 24$
c) $-6x > 12$
d) $16 \leqslant -4x$
e) $4 < 7x$
f) $-3x > 9$
g) $-9 < -3x$
h) $21x < 14$
i) $-14 \leqslant -7x$
j) $1{,}1x \geqslant -2{,}2$
k) $0{,}3 < 0{,}15x$
l) $5x - 1 \geqslant 4$
m) $-8x + 9 \geqslant -7$
n) $3x - 5 < x + 7$
o) $-2x + 11 > 5x + 31$
p) $-4x + 9 \leqslant 8x - 3$
q) $-2x + 1 \geqslant -x + 2$
r) $-3x + 16 \geqslant 5x$
s) $-3x - 4 > 5x$
t) $-x > 1 + x$
u) $7x + 15 > -6$



4 S'ENTRAINER

Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

(E) : $3x + 2 + 5(4 - x) = 8 - 2x$.

(F) : $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{5x-2}{6}$.

(G) : $\frac{2x+3}{x-4} - \frac{x+1}{x+4} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$.

$$(H):\ \frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$$



a) Montrer que pour tout réel x on a : $3x^2+x-4=(x-1)(3x+4)$.

b) Résoudre alors, dans IR, l'équation $3x^2+x-4=0$ et l'inéquation $3x^2\geq 4-x$.



Résoudre, dans IR, chacune des équations suivantes :

$\frac{|1+x|-1}{x}=0$; $\frac{|x|-3}{|x|}=\frac{1}{3}$; $||x|+1|=\sqrt{2}$; $|1+x|=1$; $|x-1|+|x+3|=4$.



Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $\frac{2}{3}x-5\geq\frac{4}{9}(x-5)$; b. $(x-2)(3x-1)>3x-1$; c. $\frac{x^2-x+2}{x+1}\leq 1$; d. $\frac{x-1}{x-3}\leq\frac{x-2}{x-4}$



SE PERFECTIONNER

Le personnel soignant d'un service hospitalier est composé de 84 personnes : médecins, infirmières, aides-soignantes.

Il y a quatre fois moins de médecins que d'infirmières et neuf fois plus d'aides-soignantes que de médecins. On désigne par x le nombre de médecins.

1) Exprimer en fonction de x :

-le nombre d'infirmières

-le nombre d'aides-soignantes

2) Écrire et résoudre l'équation en x qui traduit l'énoncé. En déduire le nombre de personnes de chaque catégorie.



SE PERFECTIONNER

Un élève a eu deux notes en mathématiques.

Entre les deux, il a progressé de quatre points et sa moyenne est de 13.

Quelles sont ces deux notes ?

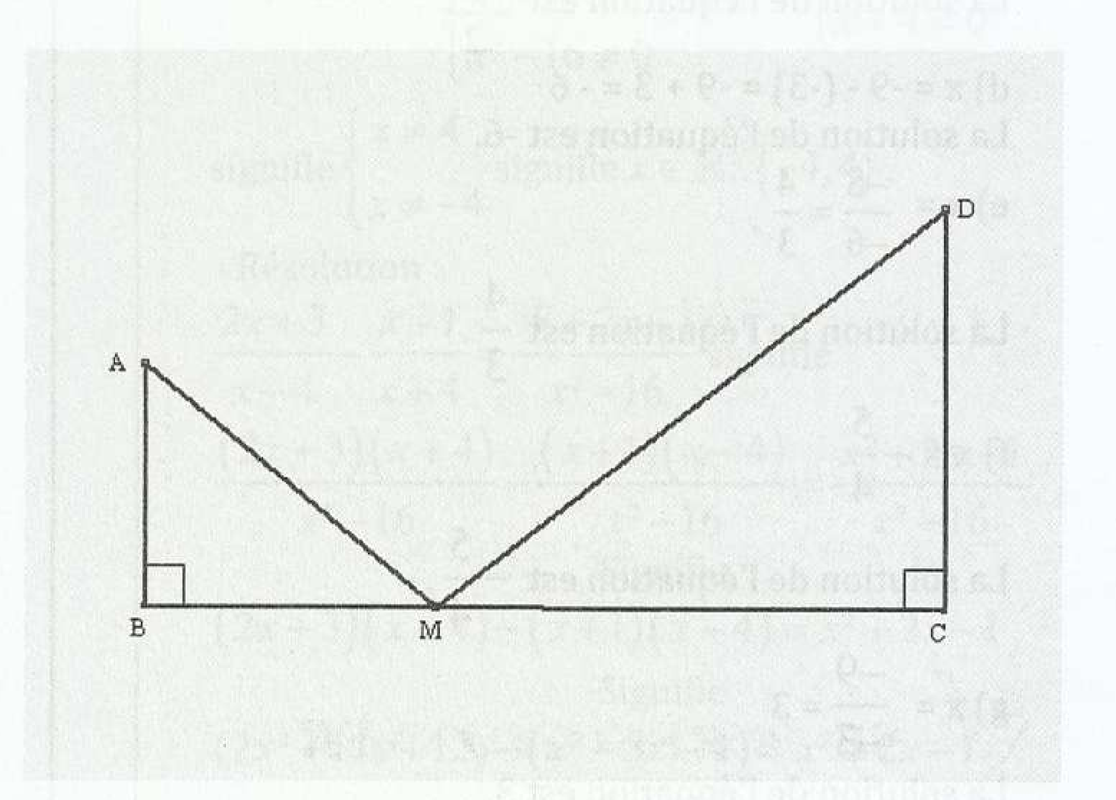


SE PERFECTIONNER

Je dépense le quart de mon salaire pour mon logement et les deux cinquièmes pour la nourriture.
Il me reste 378 D pour les autres dépenses.
Calculer mon salaire mensuel.
On veut disposer un certain nombre de jetons en carré (par ex avec 9 jetons on fait un carré de 3 sur 3). En essayant de constituer un premier carré, on s'aperçoit qu'il reste 14 jetons. On essaie alors de faire un deuxième carré en mettant un jeton de plus par côté. Il manque alors 11 jetons. Combien y avait-t-il de jetons au départ ?



SE PERFECTIONNER

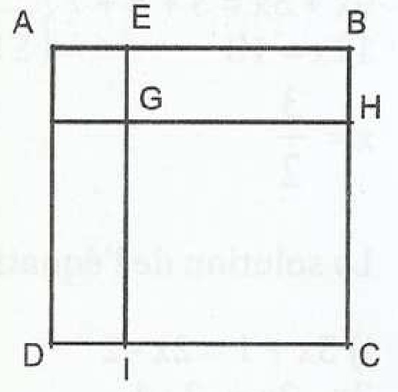


L'unité de longueurs est le cm.
Le point M se déplace sur le segment [BC]. On veut savoir où doit placer le point M pour que les triangles ABM et CDM aient la même aire.
On donne AB = 3, DC = 5 et BC = 10.



SE PERFECTIONNER

Le carré ABCD mesure 10cm de coté, E est un point de $[AB]$ tel que AEGH et GHCI soient des carrés.



a- On pose AE= x, calculer l'aire S_1 du carré AEGH et l'aire S_2
b- du carré GHCI en fonction de x.
c- On pose $S(x)= S_1 + S_2$, montrer que $S(x)= 2x^2 -20x+100$
d- Déterminer x pour que S(x) soit égale à la moitié de l'aire
e- du carré ABCD.



Corrigé

1 Q-C-M

1) a) ; 2) b) ; 3) c) ; 4) c) ; 5) c) ; 6) b) ; 7) a) ; 8) c) ; 9) c) ; 10) c)

2 APPLIQUER

a) $x = 4{,}8 - 0{,}6 = 4{,}2$
La solution de l'équation est 4,2.
b) $x = 5 - (-2) = 7$
La solution de l'équation est 7.
c) $x = -\frac{5}{2}$
La solution de l'équation est $-\frac{5}{2}$.
d) $x = -9 - (-3) = -9 + 3 = -6$
La solution de l'équation est -6.
e) $x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$
La solution de l'équation est $\frac{4}{3}$.
f) $x = -\frac{5}{4}$
La solution de l'équation est $-\frac{5}{4}$.
g) $x = \frac{-9}{-3} = 3$
La solution de l'équation est 3.
h) $4 + 2x = 10 - 4x$
$2x + 4x = 10 - 4$
$6x = 6$
$x = 1$
La solution de l'équation est 1.
i) $9x - 7 = 3 - 3x + 8$
$9x + 3x = 3 + 8 + 7$
$12x = 18$
$x = \frac{3}{2}$
La solution de l'équation est $\frac{3}{2}$.
j) $3x + 1 = 2x - 2$
$3x - 2x = -2 - 1$
$x = -3$
La solution de l'équation est -3.
k) $5x + 10 = 3x + 40$
$5x - 3x = 40 - 10$
$2x = 30$
$x = 15$
La solution de l'équation est 15.
l) $4 + 2x = 20 - 8x$
$2x + 8x = 20 - 4$
$10x = 16$
$x = \frac{8}{5}$
La solution de l'équation est $\frac{8}{5}$.
m) $2(3x - 1) - 2x = 7x + 3$
$6x - 2 - 2x = 7x + 3$
$4x - 2 = 7x + 3$
$4x - 7x = 3 + 2$
$-3x = 5$
$x = -\frac{5}{3}$
La solution de l'équation est $-\frac{5}{3}$.
n) $10x - 5 - 3(2x + 5) = -20$
$10x - 5 - 6x - 15 = -20$
$4x - 20 = -20$
$4x = -20 + 20$
$4x = 0$
$x = 0$
La solution de l'équation est 0.
$\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$
$\frac{2}{3}x = -\frac{5}{6}$
$x = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = -\frac{5}{4}$
La solution de l'équation est $-\frac{5}{4}$.
p) $x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$
$x - \frac{1}{2}x = 2 + 1$
$\frac{1}{2}x = 3$; $x = 6$
La solution de l'équation est 6.
q) $2x - \frac{1}{4} = 5x - \frac{7}{4}$

La solution de l'équation est $\frac{1}{2}$.

r) $\frac{6(x-5)}{14}-\frac{2(-3x+8)}{7}-\frac{x-4}{2}=1$

En multipliant l'équation par 14, on obtient :

6(x - 5) - 4(-3x + 8) -7(x - 4) = 14

6x - 30 + 12x - 32 - 7x + 28 = 14

11x - 34 = 14

11x = 48

x = $\frac{48}{11}$

La solution de l'équation est $\frac{48}{11}$.



3 APPLIQUER

a) $x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty[$

b) $x < 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[$

c) $x < -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[$

d) $x \leqslant -4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4]$

e) $x > 4/7 \Leftrightarrow x \in]4/7, +\infty[$

f) $x < -3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[$

g) $x < 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[$

h) $x < 2/3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2/3[$

i) $x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$

j) $x \geqslant -2 \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[$

k) $x > 2 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$

l) $x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$

m) $x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$

n) $x < 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 6[$

o) $x < -20/7 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -20/7[$

p) $x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$

q) $x \leqslant -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$

r) $x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$

s) $x < -1/2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -½[$

t) $x < -1/2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -½[$

u) $x > -3 \Leftrightarrow x \in]-3, +\infty[$



4 S'ENTRAINER

* $3x+2+5(4-x)=8-2x$ signifie

$3x+2+20-5x=8-2x$

Signifie

$3x-5x+2x=8-2-20$

Signifie $0\cdot x=-14$

impossible ; $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

* $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}=\frac{5x-2}{6}$ signifie

$\frac{3x+2(x-1)}{6}=\frac{5x-2}{6}$

Signifie $3x+2(x-1)=5x-2$

Signifie $3x+2x-5x=-2+2$

Signifie $0\cdot x=0$ toujours vraie ; $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

* $\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x+1}{x+4}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

Condition : $\begin{cases} x-4\neq 0 \\ x+4\neq 0 \\ x^2-16\neq 0 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} x-4\neq 0 \\ x+4\neq 0 \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq -4 \end{cases}$ signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$.

Résolution :

$\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x+1}{x+4}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$ signifie

$\frac{(2x+3)(x+4)}{x^2-16}-\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-16}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-16}$

Signifie

$(2x+3)(x+4)-(x+1)(x-4)=x^2+2x-1$

Signifie

$(2x^2+11x+12)-(x^2-3x-4)=x^2+2x-1$

Signifie

$x^2+14x+16=x^2+2x-1$

Signifie $12x=-17$

Signifie $x=-\frac{17}{12}$

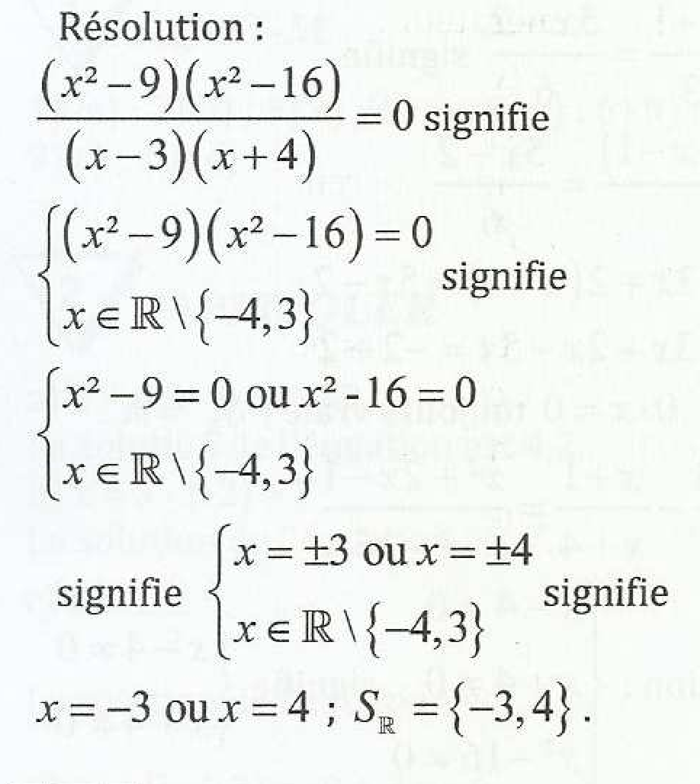
$\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{17}{12}\right\}$.

* $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$

Condition : $\begin{cases} x-3\neq 0 \\ x+4\neq 0 \end{cases}$

signifie $\begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -4 \end{cases}$

signifie $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}$.



Résolution :

$$\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0 \text{ signifie}$$

$$\begin{cases}(x^2-9)(x^2-16)=0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases} \text{ signifie}$$

$$\begin{cases}x^2-9=0 \text{ ou } x^2\text{-}16=0\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases}$$

$$\text{signifie}\begin{cases}x=\pm3 \text{ ou } x=\pm4\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,3\}\end{cases} \text{ signifie}$$

$x=-3$ ou $x=4$; $S_{\mathbb{R}}=\{-3,4\}$.

5 S'ENTRAINER

a)

$(x-1)(3x+4)=3x^2+4x-3x-4=3x^2+x-4$

b) * $3x^2+x-4=0$ signifie $(x-1)(3x+4)=0$ signifie $x-1=0$ ou $3x+4=0$ signifie

$x=1$ ou $x=\frac{-4}{3}$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{4}{3},1\right\}$.

* $3x^2\geq4-x$ signifie $3x^2+x-4\geq0$ signifie $(x-1)(3x+4)\geq0$

x	$-\infty$	$\frac{-4}{3}$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$ 0 $+$	
$3x+4$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)(3x+4)$	$+$	0	$-$ 0 $+$	

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[1,+\infty[$.



6 S'ENTRAINER

* $\frac{|1+x|-1}{x}=0$

Condition : $x\in\mathbb{R}^*$

Résolution :

$$\frac{|1+x|-1}{x}=0 \text{ signifie}\begin{cases}|1+x|-1=0\\ x\in\mathbb{R}^*\end{cases} \text{ signifie}$$

$$\begin{cases}|1+x|=1\\ x\in\mathbb{R}^*\end{cases} \text{ signifie}\begin{cases}1+x=1 \text{ ou } 1+x=\text{-}1\\ x\in\mathbb{R}^*\end{cases}$$

$$\text{Signifie}\begin{cases}x=0 \text{ ou } x=\text{-}2\\ x\in\mathbb{R}^*\end{cases}$$

Signifie $x=-2$; $S_{\mathbb{R}}=\{-2\}$.

* $\frac{|x|-3}{|x|}=\frac{1}{3}$ Condition : $x\in\mathbb{R}^*$

Résolution :

$\frac{|x|-3}{|x|}=\frac{1}{3}$ signifie $3(|x|-3)=|x|$ signifie

$3|x|-9=|x|$ signifie $2|x|=9$ signifie $|x|=\frac{9}{2}$

signifie $x=-\frac{9}{2}$ ou $x=\frac{9}{2}$; $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right\}$

* $||x|+1|=\sqrt{2}$ signifie $|x|+1=\sqrt{2}$ signifie

$|x|=\sqrt{2}-1$ signifie $x=\sqrt{2}-1$ ou $x=1\text{-}\sqrt{2}$

$S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt{2}-1,1-\sqrt{2}\}$.

* $|1+x|=1$ signifie $1+x=1$ ou $1+x=\text{-}1$ signifie

$x=0$ ou $x=\text{-}2$; $S_{\mathbb{R}}=\{-2,0\}$.

* |x - 1| + |x + 3| = 4, ici la valeur absolue n'est pas isolée, on a besoin d'un tableau de signe

x	$-\infty$	-3	1	+
$x-1$	$-$		$-$ 0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$	$x-1$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$		$x+3$	$x+3$
Somme	$-2x-2$		4	$2x+2$

- si $x \in]-\infty, -3]$, l'équation devient :

-2x – 2 = 4 signifie que 2x = - 6 signifie que

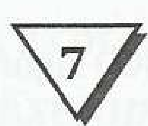
$x = -3 \in]-\infty, -3] \Rightarrow S_1 = \{-3\}$

- si $x \in [-3, 1]$, l'équation devient 4 = 4 toujours vrai $\Rightarrow S_2 = [-3,1]$
- si $x \in [1, +\infty[$, l'équation devient :

2x + 2 = 4 signifie que 2x = 2 signifie que x

$= 1 \in [1, +\infty[\Rightarrow S_3 = \{1\}$

Ainsi $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-3,1]$



7 S'ENTRAINER

a. On multiplie l'inégalité par 9 :

$\Leftrightarrow 6x - 45 \geq 4(x-5)$.

On développe le terme de droite :

$\Leftrightarrow 6x - 45 \geq 4x - 20$.

On regroupe les termes en x :

$\Leftrightarrow 6x - 4x \geq 45 - 20$.

On réduit :

$\Leftrightarrow 2x \geq 25$

Finalement :

$\Leftrightarrow x \geq \frac{25}{2}$ d'où : $S = \left[\frac{25}{2} ; +\infty\right[$.

b. Le terme (3x – 1) est présent des deux côtés :

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-1) - 1(3x-1) > 0$

On factorise par (3x – 1) :

$\Leftrightarrow (3x-1)[(x-2)-1] > 0$

D'où :

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3) > 0$.

Les valeurs qui annulent les deux termes du produit sont : $\frac{1}{3}$ et 3 .

x	$-\infty$	1/3		3	$+\infty$
$3x-1$	−	0	+		+
$x-3$	−		−	0	+
$(3x-1)(x-3)$	+	0	−	0	+

Donc : $S =]-\infty ; 1/3[\cup]3 ; +\infty[$.

c. Remarque : la fraction n'est pas définie pour $x = -1$.

On passe le « 1 » à gauche et on réduit au même dénominateur : $\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \leq 0$.

On réduit le numérateur :

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} \leq 0$

On « reconnaît » l'identité remarquable :

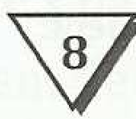
$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1} \leq 0$

Le numérateur est toujours positif, le signe du quotient est donc celui du dénominateur ! Donc $S =]-\infty ; -1[$ (−1 est exclu à cause de la remarque ci-dessus).

$\frac{x-1}{x-3} \leq \frac{x-2}{x-4} \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-4)} - \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \leq 0$.

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 5x - 6}{(x-3)(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-3)(x-4)} \leq 0$

Il faut donc que $(x-3)(x-4) > 0$, soit après avoir fait le tableau de signes : $x \in]-\infty ; 3[\cup]4 ; +\infty[$.



8 SE PERFECTIONNER

1)Exprimer en fonction de x :

-le nombre d'infirmières : les infirmières sont quatre fois plus nombreuses que les médecins. Le nombre d'infirmières est 4x.

-le nombre d'aides-soignantes : Il y a neuf fois plus d'aides-soignantes que d'infirmières. Le nombre d'aides-soignantes est 9x.

2)Écrire et résoudre l'équation en x qui traduit l'énoncé. En déduire le nombre de personnes de chaque catégorie.

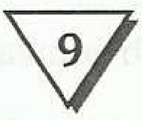
$x + 4x + 9x = 84$

$14x = 84$

$x = \frac{84}{14}$

$x = 6$

Il y a 6 médecins, 24 infirmières et 54 aides-soignantes.



9 SE PERFECTIONNER

Soit x la première note de l'élève.

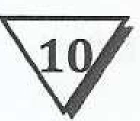
Comme entre les deux notes, il a progressé de quatre points, sa deuxième note est x + 4.

La moyenne de ces deux notes est : $\frac{x + (x+4)}{2}$

Or, nous savons que cette moyenne vaut 13. Nous pouvons donc écrire l'équation suivante:

$\frac{x + (x+4)}{2} = 13$

En multipliant cette égalité par 2, on obtient:
x + (x + 4) = 26
Donc : 2x = 26 - 4
Donc : 2x = 22
Donc : x = 11
Nous pouvons donc conclure :
Les deux notes de l'élève sont : 11 et 11 + 4 = 15.
Nous pouvons vérifier que ces deux notes nous donnent bien une moyenne de 13 :
(11 + 15)/2 = 26/2 = 13.
Notre résultat est donc correct.



10 SE PERFECTIONNER

Soit x mon salaire mensuel.
Je dépense (1/4) × x pour mon logement, (2/5) × x pour la nourriture et 378 pour les autres dépenses.
Je peux donc écrire l'équation suivante:
(1/4) × x + (2/5) × x + 378 = x.
En multipliant cette égalité par 20, on obtient:
5x + 8x + 7560 = 20x
Donc : 5x + 8x - 20x = -7560
Donc : -7x = -7560
Donc : x = 1080
Conclusion: mon salaire mensuel est de 1 080 dinars.



11 SE PERFECTIONNER

Notons x la longueur BM, a l'aire du triangle ABM en cm^2 et b l'aire du triangle CDM en cm^2

$$a = \frac{AB \times BM}{2} = \frac{3x}{2},$$

$$b = \frac{CM \times CD}{2} = \frac{(10-x)\times 5}{2}$$

ABM et CDM ont même aire lorsque a = b équivaut à $\frac{3x}{2} = \frac{(10-x)\times 5}{2}$ signifie que

3x = 50 – 5x signifie que 8x = 50 signifie que x = $\frac{50}{8} = \frac{25}{4} = 6.25$



12 SE PERFECTIONNER

a) Soit S_1 l'aire du carré AEGF, on a :

$S_1 = AE^2 = x^2$.

Soit S_2 l'aire du carré GHCI, on a :

$S_2 = GH^2 = (10-x)^2$.

b)

$$S(x) = S_1 + S_2 = x^2 + (10-x)^2 = x^2 + x^2 - 20x + 100$$
$$= 2x^2 - 20x + 100$$

c) S(x) est la moitié de l'aire du carré ABCD signifie

$$S(x) = \frac{AB^2}{2}$$

Signifie $S(x) = 50$ signifie $2x^2 - 20x + 100 = 50$

signifie $2x^2 - 20x + 50 = 0$

Signifie $x^2 - 10x + 25 = 0$ signifie $(x-5)^2 = 0$

signifie $x = 5 \in [0,10]$.

Fonctions linéaires

I) Résumé de cours

➯ *Définition :*

Le processus qui à un nombre fait correspondre un unique autre nombre s'appelle une fonction. On peut présenter une fonction sous trois formes : algébrique (expression algébrique), numérique (tableau de valeur) ou graphique

Exemple : soit un rectangle de longueur x+2 et de largeur x. Soit la fonction f qui à x associe l'aire de ce rectangle.

➯ *Expression algébrique :*

$f : x \mapsto x(x+2)$. Le nombre x(x+2) est l'image de x par la fonction f.

On note f(x)=x(x+2).Le nombre x est l'antécédent de x(x+2).

➯ *Tableau de valeurs*

Le tableau de valeurs est formé de quelques valeurs de x et de leurs images par la fonction f

x	1	2	3	4
f(x)	3	8	15	24

➯ *Représentation graphique :*

a) La représentation graphique de la fonction f est formée de l'ensemble des points de coordonnées (x ;f(x))
b) Pour tout réels x et x', f(x+x')=f(x)+f(x')

➯ *Fonction linéaire*

a) <u>Expression algébrique :</u>

Définition : la fonction qui à un nombre x fait correspondre le nombre ax (ou a est un nombre réel fixé) est appelée fonction linéaire. On note $f : x \mapsto ax$ l'image de x par la fonction f est le nombre ax . On a donc f(x)= ax

Exemple : La fonction qui à un nombre x ; fait correspondre son triple est une fonction linéaire. On le note : $f : x \mapsto 3x$

l'image de -2 par la fonction f se note f(-2). On la calcule : f(-2)=3x(-2)=-6.

Donc l'image de -2 par la fonction f est -6. L'antécédent de -6 est -2

b) Tableau de proportionnalité :

Propriété : un tableau de valeurs associé à une fonction linéaire f(x)=ax est un tableau de proportionnalité car on multiplie la 1ère ligne par un nombre toujours le même :le coefficient a.

c) Représentation graphique :

Propriété : la représentation graphique d'une fonction linéaire $f: x \mapsto ax$ est une droite passant par l'origine du repère, a s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Application :

1) Fonction linéaire f est telle que $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{6}$

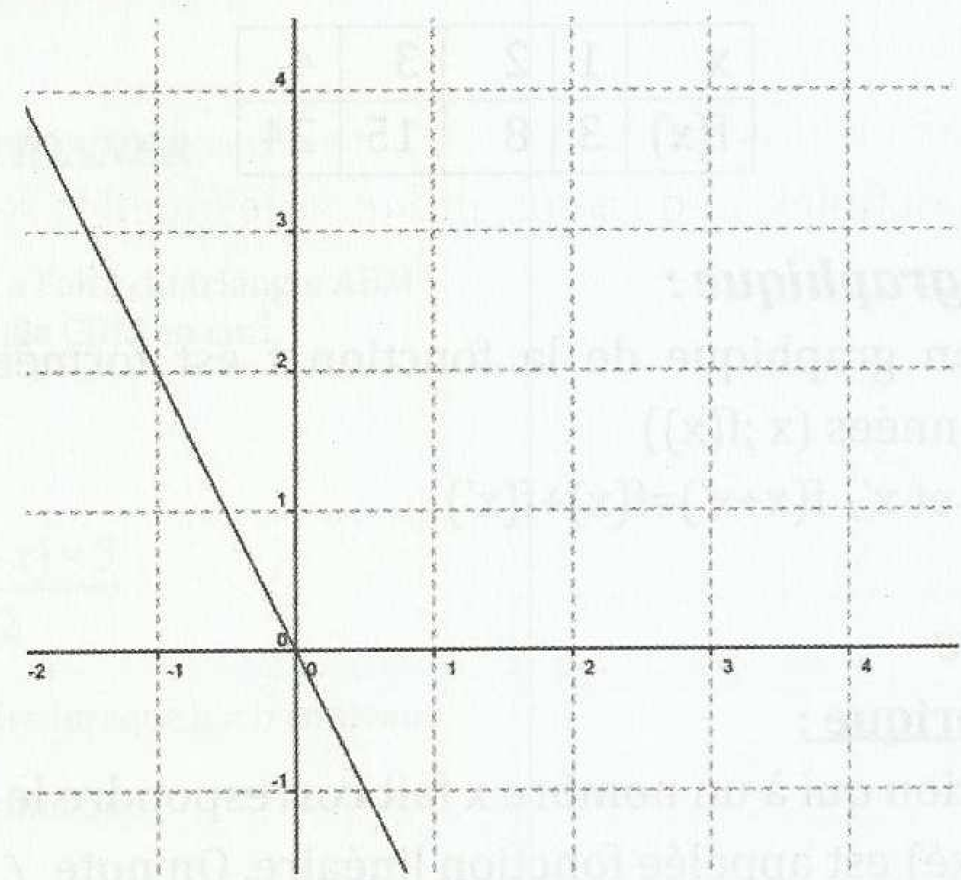
Déterminer son coefficient a puis exprimer f(x) en fonction de x.

Solution : Soit a le coefficient de f : $f(\sqrt{3}) = a \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$ sig $a = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

donc f(x)=$2\sqrt{2}x$

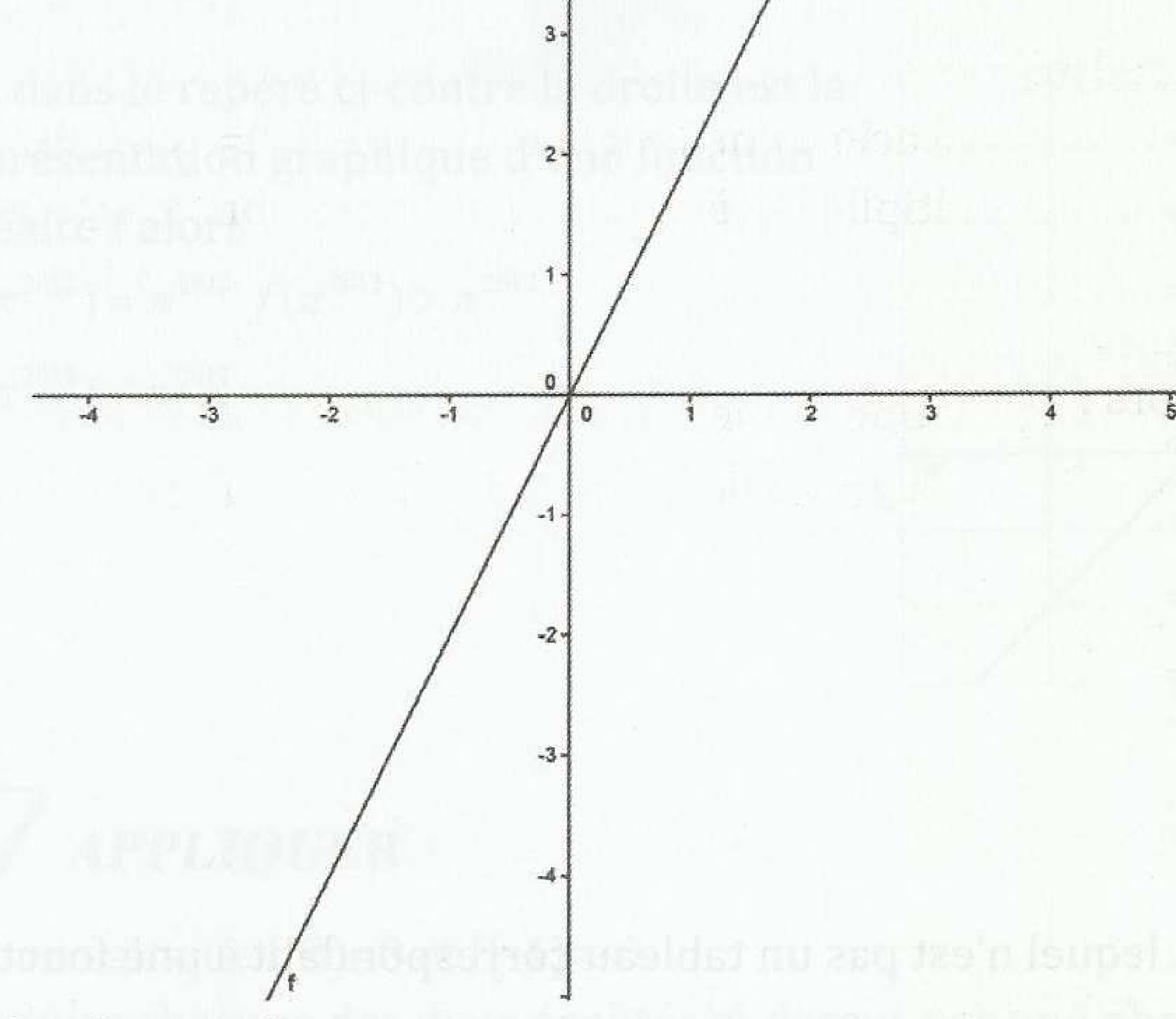
2) Représenter graphiquement la fonction $f: x \mapsto -2x$

Solution : f est une fonction linéaire sa représentation graphique est une droite qui passe par $O(0,0)$. f(-1)=-2x(-1)=2 donc, A (-1 ;2) ∈ D



Remarque : pour que le tracé d'une droite soit précis, on a intérêt à le construire avec 2 points assez éloignés.

3) La droite D représente une fonction linéaire f. Repérer sur le graphique



a) L'image de -2.
b) Le nombre x qui a pour image 2.

Solution :

a) L'image de -2 est -4 : f(-2)=-4
b) Le nombre qui a pour image 2 est 1 : f(1)=2

4) Parmi les fonctions définies ci-dessous, indiquer lesquelles sont linéaires et donner leurs coefficients

$f_1 : x \mapsto -3x$ $f_2 : y \mapsto 4y-5$

$f_3 : x \mapsto x^2-1$ $f_4 : x \mapsto 3-\frac{1}{2}x$

$f_5 : x \mapsto \left(\sqrt{2}+1\right)x$ $f_6 : t \mapsto -\frac{5}{3}t$

Solution :

f_1 est une fonction linéaire de coefficient -3.

f_5 est une fonction linéaire de coefficient $\sqrt{2}+1$

f_6 est une fonction linéaire de coefficient $-\frac{5}{3}$



II) Exercices



Q-C-M

Cocher la réponse exacte

f est une fonction linéaire alors :

- f(2) x f (3) =f(6)
- f(2) +f(3)=f(5)
- $\frac{f(2)}{f(3)} = f\left(\frac{2}{3}\right)$



Q-C-M

Parmi les tableaux suivants, lequel n'est pas un tableau correspondant à une fonction linéaire?

x	1	3	7	10
f(x)	7	21	49	70

x	3	6	7	9
g(x)	9	18	23	27

x	0.8	1.4	3.6	5.9
h(x)	3.2	5.6	14.4	23.6



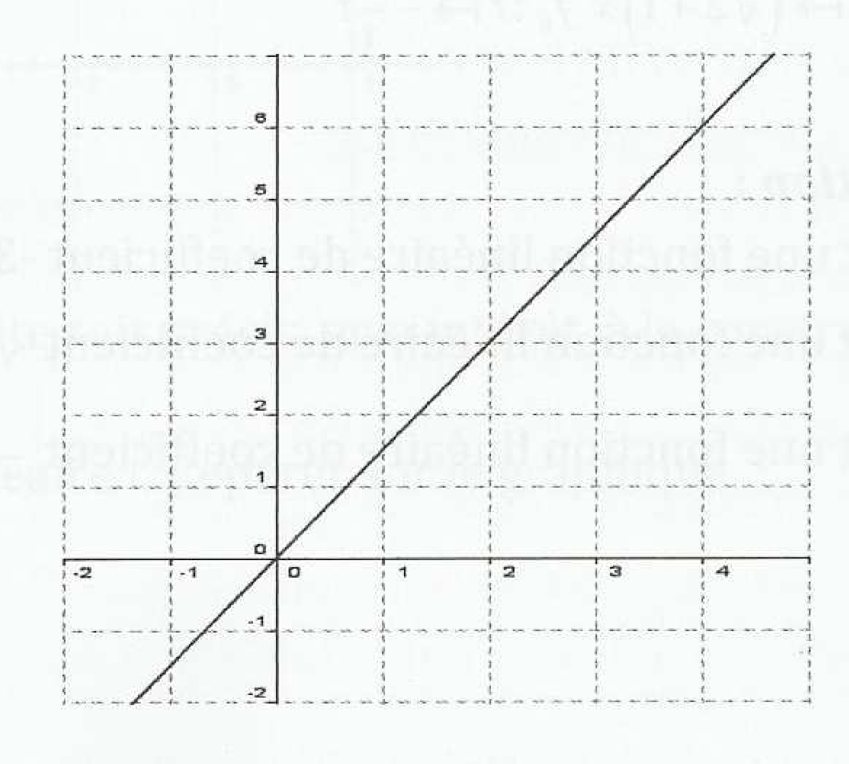
Q-C-M

Cocher la réponse exacte

- Si dans le repère ci-contre la droite est la représentation graphique d'une fonction linéaire f alors

☆ f(24)=16

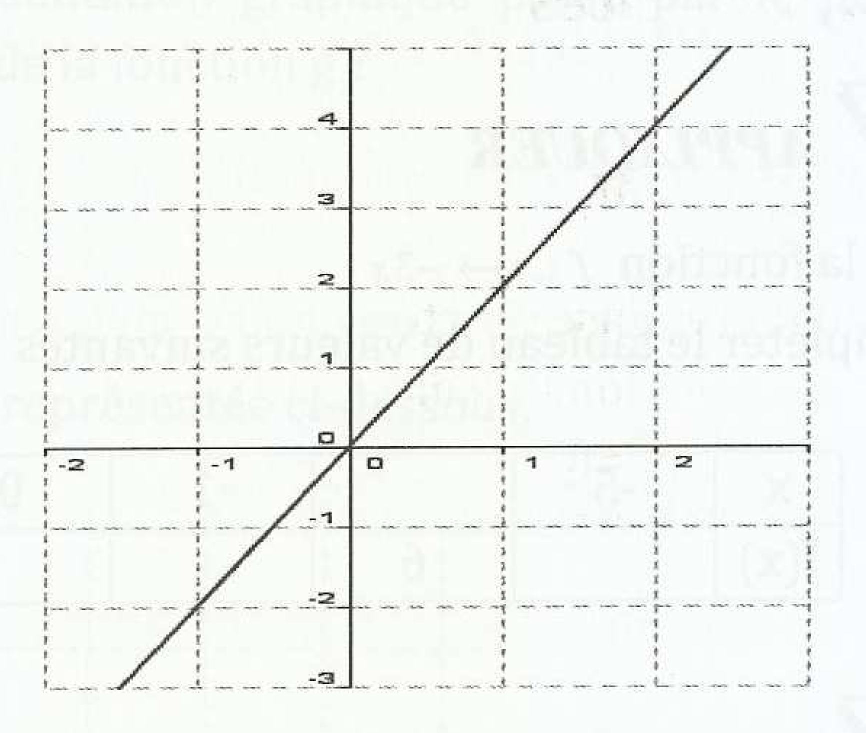
☆ f(16)=24



- Si dans le repère ci-contre la droite est la représentation graphique d'une fonction linéaire f alors

$f(\pi^{2012}) = \pi^{2012}$ $f(\pi^{2012}) > \pi^{2012}$;

$f(\pi^{2012}) < \pi^{2012}$





APPLIQUER

1) on sait que f(3)=8 et f(-4)=-6

Traduire chacune des deux égalités ci-dessus par une phrase contenant le mot « image »

2) Traduire chacune des phrases par une égalité.

L'image de 4 par la fonction g est 8

L'image de -3 par la fonction g est 10.

3) On sait que f(7)=12 et f(-3)=-6

Traduire chacune des deux égalités ci-dessous par une phrase contenant le mot « Antécédent »

4) Traduire chacune des phrases par une égalité

L'antécédent de 8 par la fonction g est 5.

L'antécédent de -3 par la fonction g est -2.



APPLIQUER

Voici un tableau des valeurs d'une fonction f

x	4	-3	12	2	5	-2	8
f(x)	12	-6	5	4	7	3	20

a) Compléter f(-3)=....   f(5)=........   f(....)=4   f(....)=5

b) Quelle est l'image de 8 par f ?

c) Quel est l'antécédent de 12 par f ?



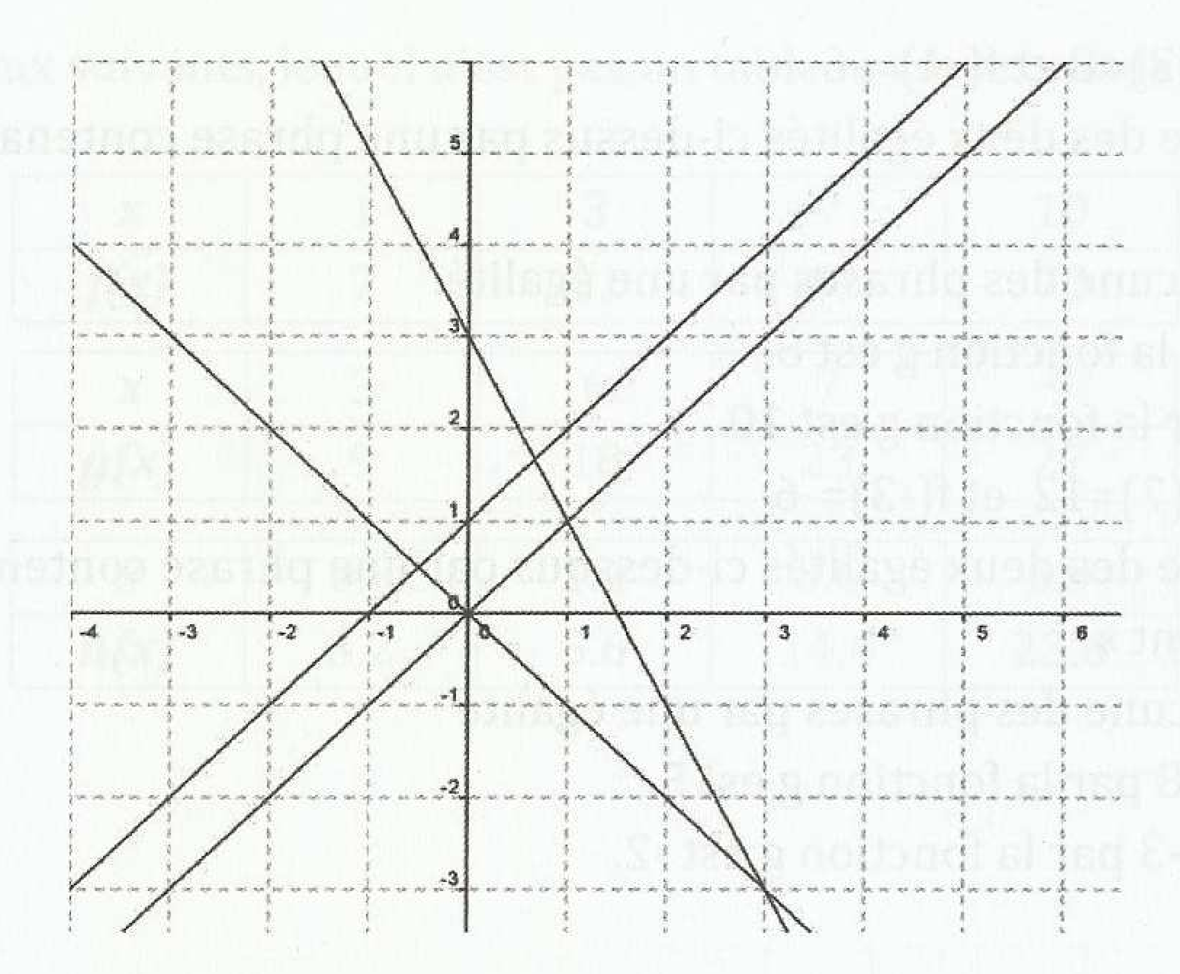
Soit la fonction $f : x \mapsto -3x$

Compléter le tableau de valeurs suivantes

x	-5		-1	0	4	
f(x)		6				-18



Parmi les tracés ci-dessous lesquels représentent une fonction linéaire ?



8 APPLIQUER

Soient les fonctions $f : x \mapsto 4x$ $g :$ x $\mapsto -x$, $h : x \mapsto \frac{3}{4}x$

Représenter les fonctions f,g et h.

9 APPLIQUER

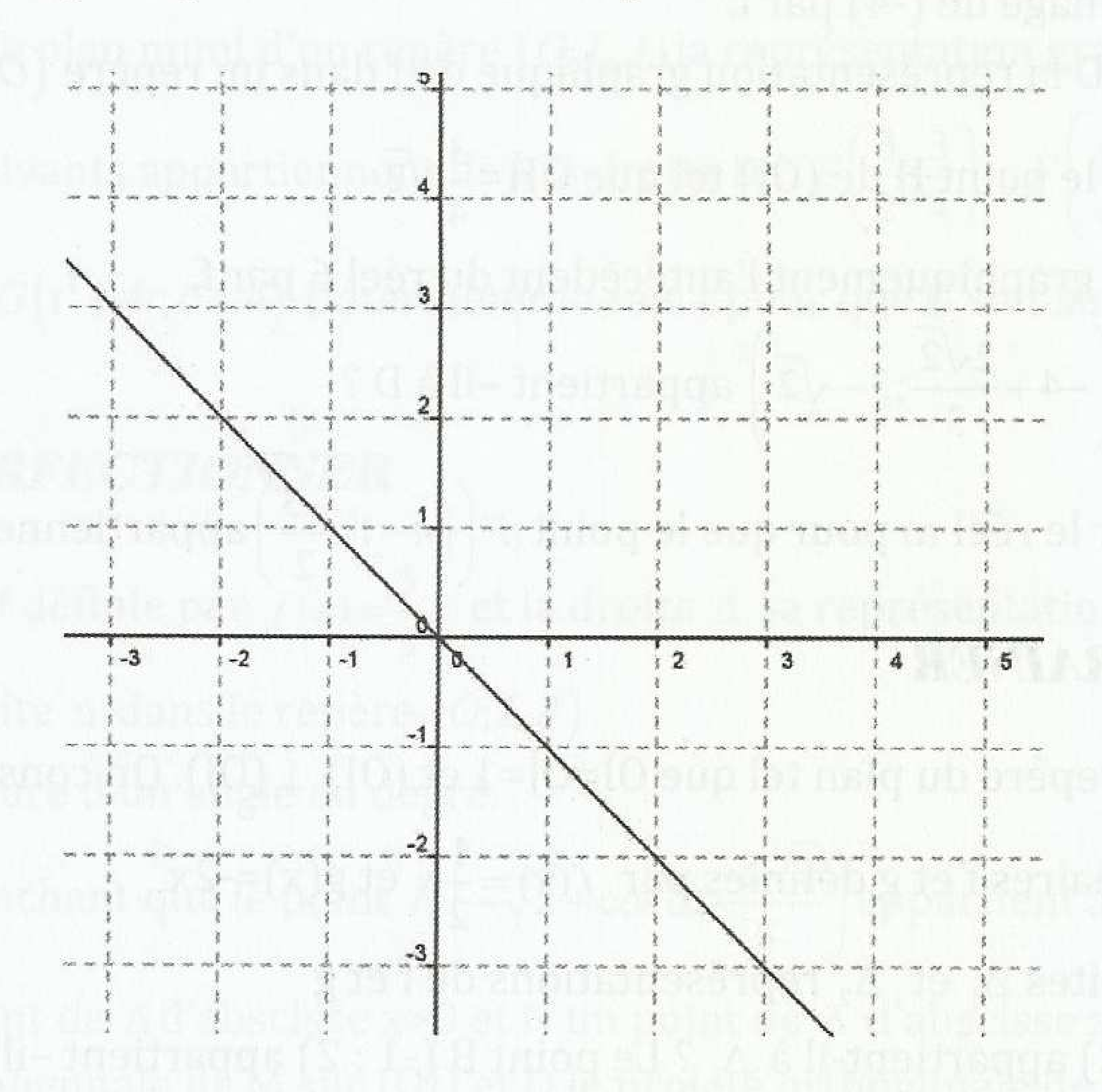
1) Soit f la fonction linéaire telle que f(2)=-6. Quelle est l'expression algébrique de la fonction ?

2) Soit une fonction linéaire g. Sa représentation graphique passe par le point A(3 ;-6). Quelle est l'expression algébrique de la fonction g ?



10 APPLIQUER

Donner la forme algébrique de la fonction f représentée ci-dessous.





11 S'ENTRAINER

Soit f la fonction linéaire définie par $f(x)=-\frac{4}{3}x$; on désigne par D sa représentation graphique dans un repère (O,I,J) du plan

1) construire D.
2) Soit $E\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1};\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)$, monter que E appartient à la droite D.
3) Déterminer les réels m pour que O, E et M $(m-1,(m-1)^2)$ soit alignés
4) Déterminer la fonction linéaire g telle que 3 g (-2)=f(2)



S'ENTRAINER

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{12}-\left(x-\frac{1}{3}\right)$

1) a) montrer que f est une fonction linéaire de coefficient $\left(-\frac{3}{4}\right)$

   b) Calculer l'image de (-4) par f.

2) a) construire D la représentation graphique de f dans un repère (O,I,J)

   b) Construire le point H de (OJ) tel que OH= $\frac{3}{4}\sqrt{2}$

   c)Déterminer graphiquement l'antécédent du réel 6 par f.

3) a) le point $E\left(-4+\frac{2\sqrt{2}}{3};3-\sqrt{2}\right)$ appartient –il à D ?

   b) déterminer le réel m pour que le point $F\left(|m-1|;\frac{-3}{2}\right)$ appartienne à D.



S'ENTRAINER

Soit (O,I,J) un repère du plan tel que OI=OJ=1 et (OI) $\perp$ (OJ). On considère les deux applications linéaires f et g définies par $f(x)=\frac{1}{2}x$ et g(x)=-2x

1) tracer les droites Δ_1 et Δ_2 représentations de f et g
2) le point A(4,2) appartient-il à Δ_1 ? Le point B (-1 ; 2) appartient –il à Δ_2
3) a) Montrer que le triangle AOB est rectangle en O.
   b) En déduire que les droites Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.



SE PERFECTIONNER

Un réservoir a la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle ABC tel que : BC = 1,4 m, AC = 5 m et AB = 4,8 m et dont la hauteur AD mesure 10 m.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2) Calculer le volume du réservoir.
3) On note x la hauteur d'eau dans le réservoir.

Exprimer le volume d'eau en fonction de x. On le note V (x).

4) a)La fonction V : x $\mapsto$ V (x) est-elle une fonction linéaire ?
   b) Calculer V (10).
   c) Exprimer par une phrase la signification de V (10).



SE PERFECTIONNER

Soit une fonction linéaire telle que: 2 f(3)-5 f(1) = $\frac{1}{2}$

1) Montrer que le coefficient de f est a= $\frac{1}{2}$

2) Tracer dans le plan muni d'un repère (O,I,J) la représentation graphique D de f.

3) Les points suivants appartiennent ils à la droite D ? $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)$

4) Soit le point $G\left(t^3+4t;t^2+4\right)$.Déterminer le réel t pour que G soit sur D.



SE PERFECTIONNER

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{5}{3}x$ et la droite Δ sa représentation graphique.

1) Tracer la droite Δ dans le repère (O,I,J)

2) Soit $\propto$ la mesure d'un angle en degré.

Déterminer $\propto$ sachant que le point $H\left(-\sqrt{2}+\cos\alpha;\frac{-5\sqrt{2}}{8}\right)$ appartient à Δ.

3) Soit M un point de Δ d'abscisse x>0 et N un point de Δ d'abscisse x+1.
P le projeté orthogonale de M sur (OI) et Q le projeté orthogonale de N sur (OI)
Déterminer x pour que l'aire du trapèze MPQN soit égal à 5cm^2



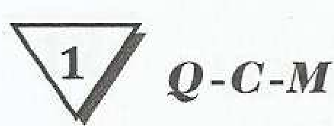
SE PERFECTIONNER

Une compagnie de transport propose un tarif « jeune » avec une réduction de 30% sur le plein tarif.

a) On désigne par x le plein tarif. Exprimer le tarif réduit y en fonction de x.

b) Quel sera le montant, en tarif « jeune », d'un billet plein tarif de 72 DT ?

c) Quel serait le montant plein tarif d'un billet de 96 DT payé en tarif « jeune » ?



Q-C-M

- Faux
- Vrai
- Faux



Q-C-M

Le tableau de la fonction g ne correspond pas à une fonction linéaire



Q-C-M

1) Graphiquement, l'image de 4 est 6, f est une fonction linéaire elle s'écrit sous la forme de ax donc $4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ ce qui donne $f(x) = \frac{3}{2}x$ par suite $f(16) = \frac{3}{2} \times 16 = 24$ c'est la réponse juste.

2) Graphiquement, l'image de 1 est 2, f est une fonction linéaire elle s'écrit sous la forme de ax donc $a = 2$ ce qui donne $f(x) = 2x$.

$f(\pi^{2012}) = 2 \times \pi^{2012} > \pi^{2012}$ c'est la réponse juste



APPLIQUER

1) L'image de 3 par f est égale à 8
L'image de -4 par f est égale a -6
2) g(4) = 8 ; g(-3) = 10
3) L'antécédent de 12 par f est égal à 7
L'antécédent de 12 par f est égal à 7
4) g(5) = 8 ; g(-2) = -3



APPLIQUER

a) f(-3) = -6 ; f(5) = 7 ; f(2) = 4 ; f(12) =5
b) f (8) = 20
c) f(4) =12



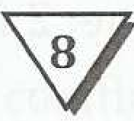
APPLIQUER

x	-5	-2	-1	0	4	6
f(x)	15	6	3	0	-12	-18

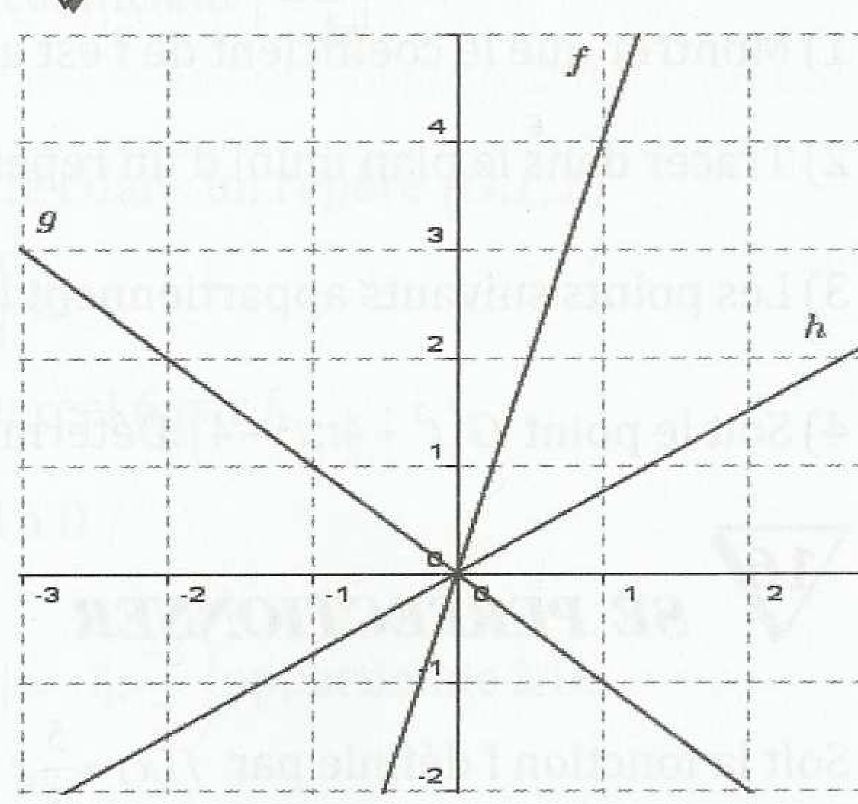


APPLIQUER

Les deux droites qui passent par l'origine représentent deux fonctions linéaires



APPLIQUER





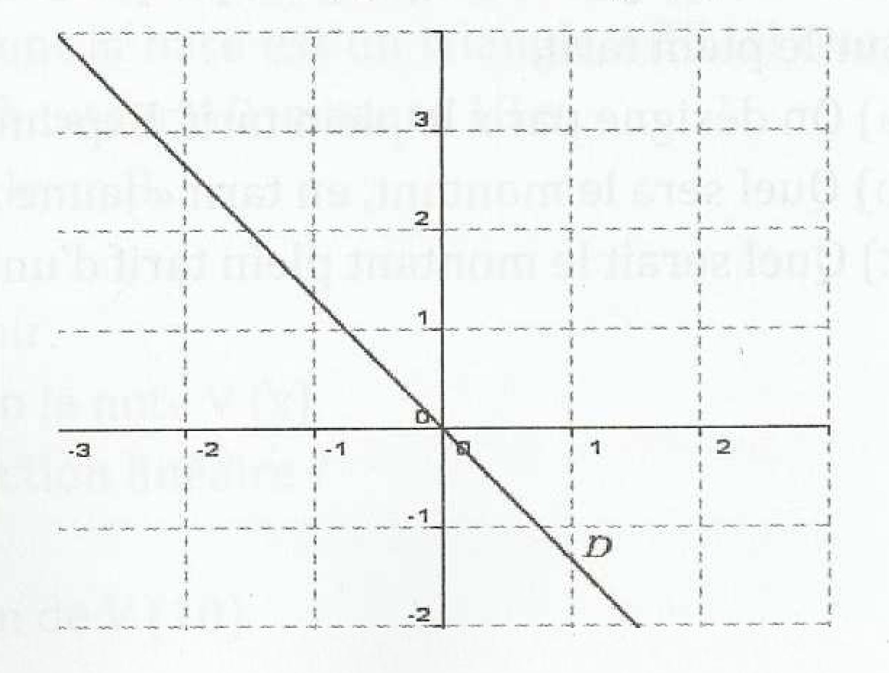
APPLIQUER

1) f est une fonction linéaire donc elle s'écrit sous la forme ax comme f(2) = -6 donc
2a = -6 signifie que a = -3
2) la représentation de la fonction g passe par A (3, -6) signifie que g(3) = -6 donc
3a = -6 ce qui donne a = -2 ainsi $g(x) = -2x$.



APPLIQUER

f est une fonction linéaire donc elle s'écrit sous la forme ax , d'après le graphe l'image de 1 est égale -1 c'est-à-dire f(1) = a = -1 donc $f(x) = -x$





S'ENTRAINER

1) $f(x) = -\frac{4}{3}x$

2) $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}\right) = -\frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{-4}{3\times(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{3\times(5-1)}$

$= \frac{1-\sqrt{5}}{3}$ donc E∈D

3) Pour que O , E et M soient alignées il suffit que M∈D, c'est-à-dire

$f(m-1) = (m-1)^2 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}(m-1) = (m-1)^2$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 + \frac{4}{3}(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)\left(m-1+\frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\left(m+\frac{1}{3}\right) = 0$

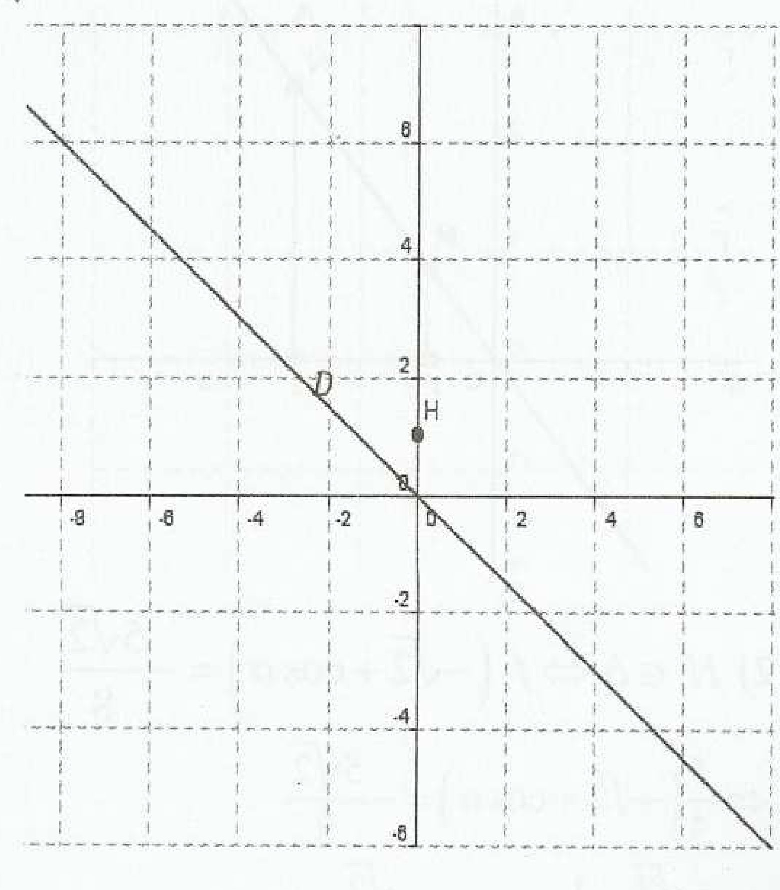
$\Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -\frac{1}{3}$.

4) $g(x) = ax$, on a 3 g (-2) = f(2) signifie que $g(-2) = \frac{1}{3}f(2)$ signifie que $-2a = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2$

signifie que $\frac{4}{9}$ donc $g(x) = \frac{4}{9}x$



S'ENTRAINER



1) a) $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{5}{12} - x + \frac{1}{3}$

$= -\frac{3}{4}x - \frac{9}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = -\frac{3}{4}x$

Est de la forme ax donc f est une fonction linéaire.

b) $f(-4) = -\frac{3}{4}\times(-4) = 3$

2) a) voir figure

b) $H\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

3) a) $f\left(-4+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{3}{4}\times\left(-4+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $E \notin D$

b) $f(|m-1|) = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}|m-1| = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow |m-1| = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = 2$

$\Leftrightarrow m-1 = 2$

ou $\Leftrightarrow m-1 = -2$

$\Leftrightarrow m = -1$ ou

$\Leftrightarrow m = 3$



SE PERFECTIONNER

1) voir figure

2) $f(4) = \frac{1}{2}\times 4 = 2 \Rightarrow A \in \Delta_1$;

$g(-1) = -2\times(-1) = 2 \Rightarrow B \in \Delta_2$

3) a) Calculons les distances OA, OB et AB

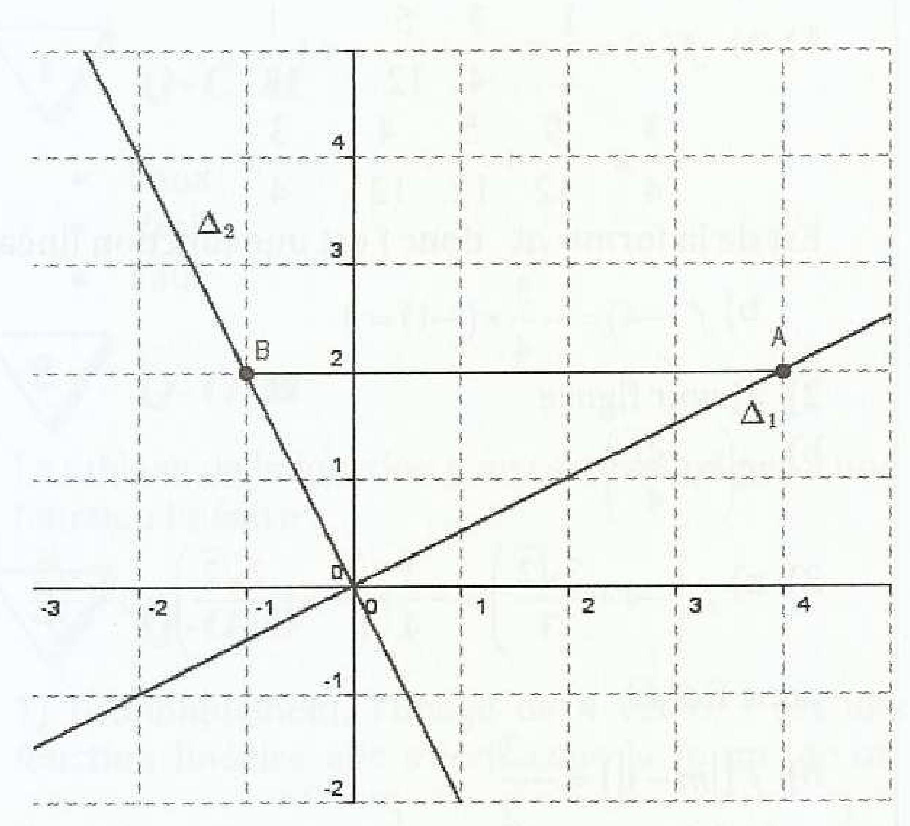
$OA = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$;

$OB = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$ et

$AB = \sqrt{(-1-4)^2+(2-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

On remarque que $AB^2 = OA^2 + OB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAB est rectangle en O.

b) Comme les droites (OA) et Δ_1 sont confondus et (OB) et Δ_2 aussi donc $\Delta_1 \perp \Delta_2$



14 SE PERFECTIONNER

1) $BA^2+BC^2=4.8^2+1.4^2=23.04+1.96=25$ et $AC^2=5^2=25$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC rectangle en B.

2) $V=S\times h$ avec S l'aire de la base et h la hauteur, donc :

$V=\frac{AB\times BC}{2}\times AD=\frac{4.8\times 1.4}{2}\times 10=33.6m^3$

3) $V(x)=S\times x=3.36x$

4) a) La fonction V(x) est une fonction linéaire

b) $V(10)=3.36\times 10=33.6$

c) V(10) c'est la volume maximal de prisme ABCD.

15 SE PERFECTIONNER

1) $2\times 3a-5a=\frac{1}{2}\Rightarrow 6a-5a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

2) Voir figure

3) $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow E\in D$

$f\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

$\Rightarrow F\in D$

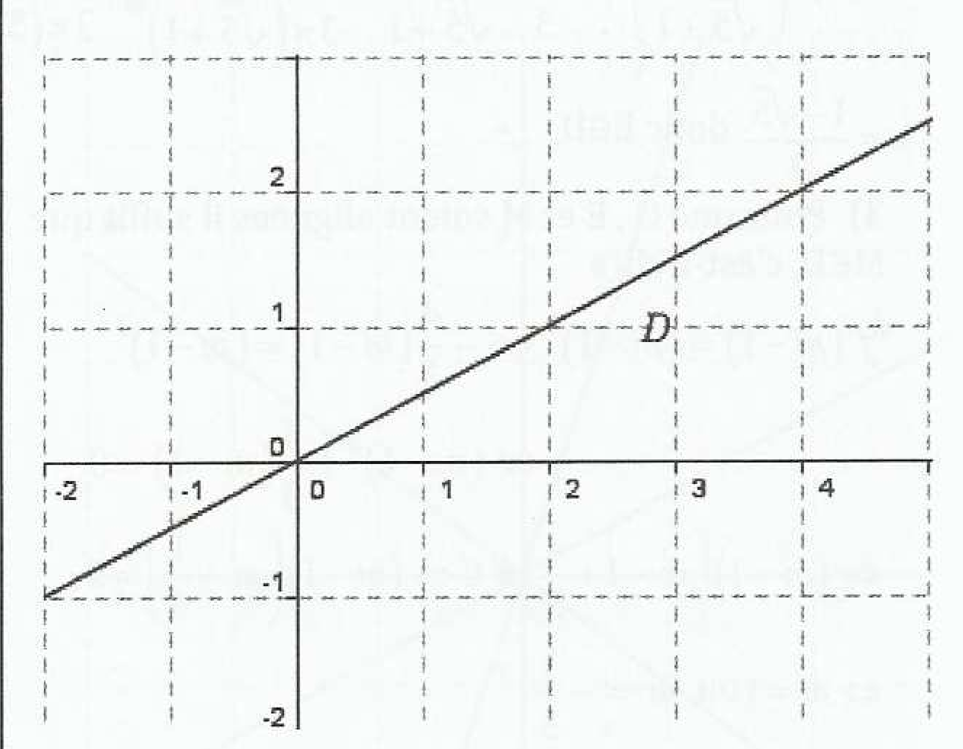
4) $G\in D\Leftrightarrow f\left(t^3+4t\right)=t^2+4$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}t^3+2t=t^2+4\Leftrightarrow\frac{1}{2}t\left(t^2+4\right)=t^2+4$

$\Leftrightarrow\left(t^2+4\right)\left(\frac{1}{2}t-1\right)=0\Leftrightarrow t^2=-4$ (impossible)

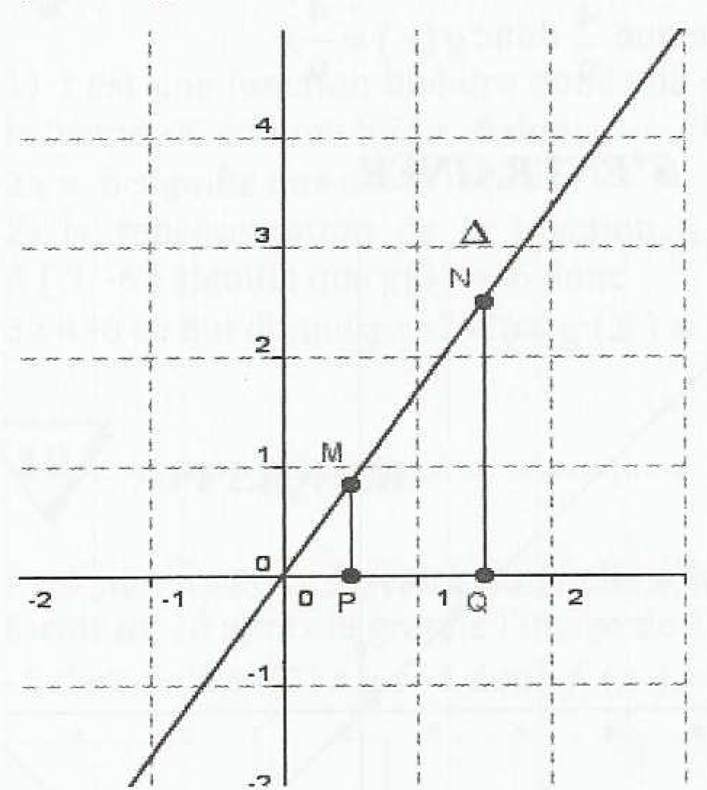
ou $t=2$

Donc pour t =2, $G\in D$.



16 SE PERFECTIONNER

1) Voir figure



2) $H\in\Delta\Leftrightarrow f\left(-\sqrt{2}+\cos\alpha\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow\frac{5}{3}\left(-\sqrt{2}+\cos\alpha\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \alpha = 27.88^\circ$

3) $a_{MPQN} = \frac{1}{2}(NQ + MP) \times QP$

$= \frac{1}{2}\left(f(x+1) + f(x)\right) \times 1$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{5}{3}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3}\right)$

$a_{MPQN} = 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3}\right) = 5$

$\Leftrightarrow 10x = 25$

$\Leftrightarrow x = 2.5$

a) Le tarif jeune est réduit de 30% du tarif normal. Le tarif jeune s'obtient donc en multipliant le tarif plein par $1 - \frac{30}{100}$ soit 0.7.

Donc y=0.7x

b) Si le plein tarif x est de 72DT alors y=0.7x72 ; y=50.40

c) Si le prix payé y en tarif jeune est de 96DT alors on est amené à résoudre l'équation 0.7x=96 pour trouver le tarif plein. D'où $x = \frac{96}{0.7}$ donc x≈137,114Le tarif plein serait alors de 137,14DT

Fonctions affines

I) Résumé du cours

1) Fonction affine :

Une fonction affine est définie sur IR par $f(x) = ax + b$

- a est une constante réelle qui s'appelle le coefficient de la fonction affine f
- b est une constante réelle qui s'appelle l'ordonnée à l'origine
- Cas particuliers :

Si b = 0 alors pour tout réel x, f(x) = a x (dans ce cas f est une fonction linéaire).
Si a = 0 alors pour tout réel x, f(x) = b (dans ce cas f est une fonction constante)

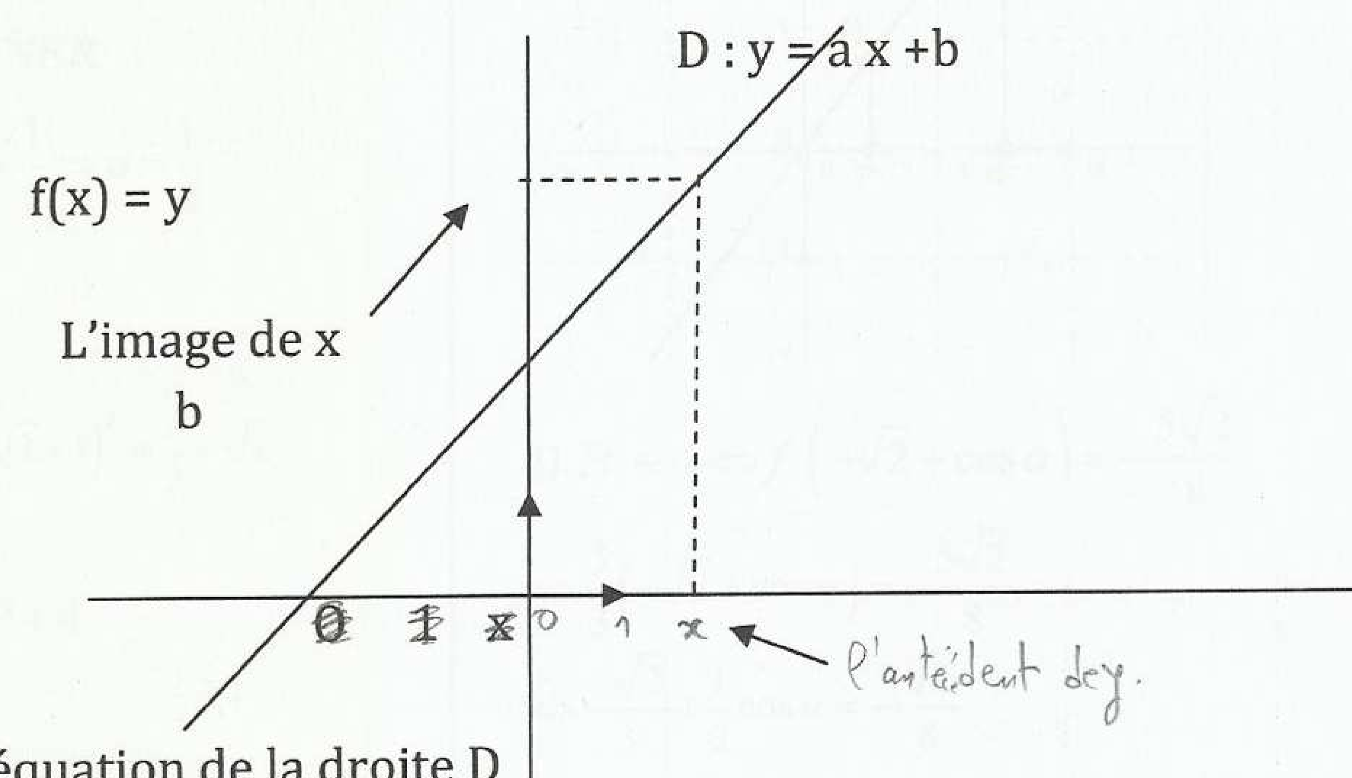
- On a : f (0) = b
- Pour tous réels x_1 et x_2 tel que $x_1 \neq x_2$ on a : $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

2) Représentation graphique d'une fonction affine :

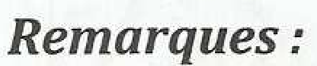
Soit f une fonction affine définie sur IR par $f(x) = ax + b$ et soit R (O,I,J) un repère de plan

Définition : La représentation graphique Cf de la fonction affine f dans le repère R Est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ avec $x \in IR$

Théorème : La représentation graphique Cf de la fonction affine f dans le repère R est une droite D.



L'antécédent de y
y = a x +b s'appelle une équation de la droite D
a s'appelle le coefficient directeur de D.



Remarques :

- M(x, y) ∈ Cf signifie y = f(x) signifie y = a x + b
- Si a > 0 la pente de la droite D : y = a x + b est positive
- Si a < 0 la pente de la droite D : y = a x + b est négative
- D : y = a x + b et D' : y = a' x + b' deux droites on a D // D' signifie a = a'
- Soit I un intervalle inclus dans IR,

La fonction g définie sur I par $g(x) = ax + b$ s'appelle la restriction de f à l'intervalle I, sa représentation graphique Cg est la partie de Cf relative à l'intervalle I.

Théorème 2 : Relativement à repère R(O,I,J) toute droite qui n'est parallèle à (O,J) est la représentation graphique d'une fonction affine.

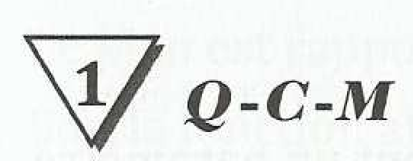
3) Détermination d'une fonction affine connaissant deux réels et leurs images :

Soit f une fonction affine tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ avec $x_1 \neq x_2$.

Pour calculer a on utilise la formule $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Puis on détermine b à partir de $f(x_1) = y_1$

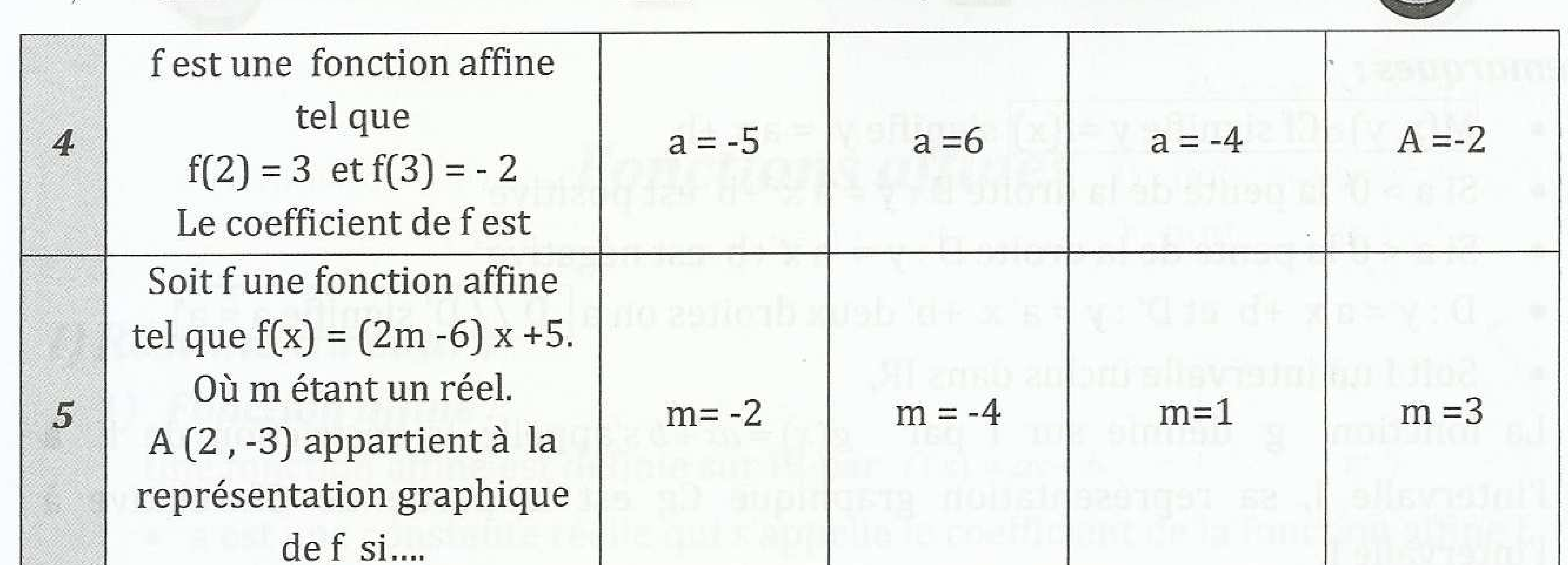
II) Exercices



1 Q-C-M

Une ou plusieurs réponses sont correcte :

		R1	R2	R3	R4
1	-5 est l'image de 4 par la fonction affine f	f(x)=2x-3	f(x)=3x - 17	f(x) = -3x +2	f(x)= -2x+3
2	Le nombre qui a pour image 27 par la fonction affine définie par f(x) = - 2x +3 est	4	-12	5	8
3	f est une fonction affine définie par f(x) =2x -3. parmi Les points qui appartient à la représentation graphique de f	A(2,6)	B(4,5)	C(- 2, 7)	D(20, - 37)



4	f est une fonction affine tel que f(2) = 3 et f(3) = - 2 Le coefficient de f est	a = -5	a =6	a = -4	A =-2
5	Soit f une fonction affine tel que f(x) = (2m -6) x +5. Où m étant un réel. A (2 , -3) appartient à la représentation graphique de f si....	m= -2	m = -4	m=1	m =3

2 VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) Le prix d'un produit a subit une hausse de 20 % puis une réduction de 20 % puis en ajoute 10 dinars. On désigne par x son prix initial et par f(x) son prix final on a : f(x) = 0,96 x+10

2) Soit g la fonction affine définie par g(x) = 4x-1 on (note Δ g sa représentation graphique). Soit f la fonction affine telle que sa représentation graphique Δ f est parallèle à Δ g et passant par A(2,-3)

Alors f(x) = 4x -11

3) Soit f et g deux fonctions affines tel que f(x) = $(2m-2)$x + 5(m étant un paramètre réel) et g(x) = - 4 x + 4.

a) On a f est une fonction constante signifie m = 0

b) On a Δf est parallèle à Δg signifie m = - 1

3 APPLIQUER

Parmi les fonctions f, g , h , t et k indiquer celles qui sont affines

$f(x)=3x-4$, $g(x)=(4x-4)-4x$, $h(x)=(3x-1)^2-9x^2$, $t(x)=\frac{5}{2}x$, $k(x)=2x^2-4x+5$



4 APPLIQUER

Soit la fonction affine f affine définie par $f(x)=5x+1$

1) Déterminer les images par f de 5, - 2 et $-\frac{1}{4}$.

2) Déterminer les antécédents par f de 16,-9 et $\frac{5}{2}$.



5 APPLIQUER

1) Soit f une fonction affine tel que f(x) = 2x + b et f(-10)=14. Déterminer b
2) Soit g une fonction affine tel que g(x) = a x + 4 et g(2)= 5. Déterminer a .



6 APPLIQUER

Déterminer la fonction affine f dans chacun des cas ci-dessous
1) f(3) =8 et f(-1) =2
2) f(4) = 5 et f(-1) = - 5

7 APPLIQUER

Le plan est rapporté a un repère $R(O,I,J)$.
Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous

f(x) = -2x +1 $g(x)=\frac{5}{2}x-3$ h(x) = 4 t(x) =2x

8 APPLIQUER

Le plan est rapporté à un repère $R(O,I,J)$.
Soit la fonction affine f tel que f(x) =2x+5
Soit Δf la représentation graphique de f.

1) Compléter par $\in$ ou $\notin$ en justifiant :
A(-3,-1) .... Δf ; B(4,-10) ..... Δf ; C(100,205) .... Δf ; D(-20,35).... Δf
2) Soit I(2m-3 ; m+1) Déterminer m pour que I $\in \Delta f$

9 APPLIQUER

Le plan est rapporté à un repère $R(O,I,J)$.
On donne les points A(4,5) , B(2,1) et C(50, 97).
Soit la fonction affine f ayant pour représentation graphique la droite (AB)

1) Déterminer l'expression de f(x)
2) Montrer que les points A,B et C sont alignés.

10 APPLIQUER

Le plan est rapporté à un repère $R(O,I,J)$.

On donne les points A(2,4) , B(5,-2) et C(5,1)
Déterminer la fonction affine f ayant pour représentation graphique la droite passant par C est parallèle à (AB)



11 APPLIQUER

Le plan est rapporté a un repère orthonormé $R(O,I,J)$.

1) Soit les fonctions affines f et g définie par $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ et $g(x)=-x+3$

a) Représenter graphiquement f et g dans le repère R .

b) Déterminer le point K intersection de Df et Dg les représentations graphiques respectives de f et g.

2) Représenter graphiquement sur le même repère la restriction de la fonction affine f à l'intervalle [2,3]



12 S'ENTRAINER

Le plan est rapporté a un repère orthonormé $R(O,I,J)$

On considère la fonction affine f définie par $f(x)=\frac{3}{2}x+2$ et les points A(4,2) et B(2,3).

1)a) Représenter graphiquement f dans le repère R.

b) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 5

2) Soit g la fonction affine ayant pour représentation graphique la droite (AB)

a) Représenter graphiquement g.

b) Déterminer l'expression de g(x).

c) Déterminer les coordonnées de point K l'intersection de Δf et Δg.

3) Soit C(2,1)

a) Prouver que $C\notin\Delta g$.

b) Soit Δ' l'image de Δg par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$.

Construire Δ' et déterminer la fonction affine h ayant pour représentation graphique la droite Δ'

4) Soit le point M (x, $\frac{3}{2}x+2$) avec x est un réel

Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque x varie dans $[1,+\infty[$



S'ENTRAINER

Le plan est rapporté à un repère R(O,I,J) tel que OI =OJ et (OI)$\perp$(OJ)

Soit f la fonction affine ayant pour représentation graphique la droite (EF) où $E(-2,4)$ $F(2,12)$

1) Tracer (EF) et déterminer graphiquement l'image de -3 par f et l'antécédent de -6 par f.
2) Déterminer f(x).
3) Soit g la fonction affine tel que g(x) = - 2x+ 14
   a) Tracer Δg dans le même repère R .
   b) Soient H et K les points d'intersections respectifs de Δg avec (x'x) et (y'y) Déterminer par le calcul les coordonnées de H et K.
4) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I de Δf et Δg .
5) Soit ABCD un trapèze rectangle en D tel que AB =AD =4 et CD =7 et soit M un point quelconque du segment [DC] on pose x =DM
   a) Montrer que l'aire du triangle MBC est g(x) et celui du trapèze ABMD est f(x).
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$
   c) En déduire les valeurs de x pour les quelles $Aire(MBC) \leq Aire(ABMD)$



SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère R(O,I,J) tel que OI =OJ=1 et (OI)$\perp$(OJ)
Soit f la fonction affine définie par f(x) = 3x - 4

1) Déterminer l'image de -2 par f et l'antécédent de 6 par f.
2) Représenter graphiquement f dans le repère R.
3) Soit les points A(3,1) , B(- 2,6).
   a) Déterminer la fonction affine g ayant pour représentation graphique la droite (AB)
   b) Déterminer par calcul le point d'intersection I' de Δf et Δg (Δf et Δg désignent respectivement les représentations graphiques de f et g)
4) La droite D d'équation y = 4 coupe Δf et Δg respectivement en H et K. Calculer l'aire du triangle I'HK.



SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère R(O,I,J)

1) Soit f la fonction affine définie par $f(x)=\frac{1}{2}x-2$

Représenter graphiquement f (On note Δf sa représentation graphique)

2) Δf coupe l'axe des ordonnées en A et l'axe des abscisses en B. Déterminer les cordonnées de A et B

3) Soit C(-2 ,4) , E le milieu de [BC] et F le milieu de [AB]

a) Déterminer la fonction affine g dont la représentation graphique est la médiane du triangle ABC issue de A.

b) Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (CF).

c) En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.



SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté a un repère orthonormé $R(O,I,J)$

On considère la fonction affine f définie par $f(x)=2x-2$

Soient les points A(4,6) et B(8,2)

1) a) Représenter graphiquement f dans le repère R. (on note Δf la représentation graphique)

b) Justifier pourquoi $A \in \Delta f$.

2) Soit g la fonction affine ayant pour représentation graphique la droite (AB).

a) Déterminer l'expression de g(x).

b) Existe-t-il une translation tel que l'image de (AB) par cette translation est Δf ? Justifier.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) < g(x) puis justifier le résultat par le calcul

3) Soit M un point de Δf d'abscisse x >4, la perpendiculaire à (OI) passant par M coupe (AB) en un point N.

a) Calculer en fonction de x l'aire $\mathscr{A}$ du triangle AMN.

b) Déterminer pour quelle valeur de x ; $\mathscr{A}$=24.



SE PERFECTIONNER

Pour livrer ses matériaux à ses clients, une entreprise A applique le tarif suivant : **40 D plus 2 D du km parcouru.** Son concurrent l'entreprise B affiche le tarif : **4 D du km.**

On appelle x le nombre de kilomètres parcourus et par f(x) et g(x) respectivement les prix à payer en dinars pour les entreprises A et B.

1) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.

2) Donner le prix à payer à chaque entreprise pour x = 12 km.

3) Donner le nombre de kms parcourus si un client a payé 68 D à l'entreprise A.

4) Déterminer la distance pour laquelle le prix à payer quelle que soit l'entreprise choisie est le même.

5) A partir de quel Km l'entreprise A est la plus intéressante pour un client.



SE PERFECTIONNER

Un théâtre propose deux tarifs pour la saison:

- Tarif S : 8 D par spectacle.
- Tarif A: achat d'une carte de 20 D donnants droits à un tarif préférentiel de 4 D par spectacle.

1) Recopie et compléter le tableau suivant, sachant que Sami a choisi le tarif S et Amine le tarif A.

Nombre de spectacles	4	9	15
Dépense de Sami en D			
Dépense de Amine en D			

2) Exprimer, en fonction de *x*, le prix *s(x)* payé sami. Puis le prix *A(x)* payé par Amine.

3) Résoudre l'équation $8x = 4x + 20$. A quoi correspond la solution de cette équation?

4) Représenter graphiquement les fonctions *s* et *p* définies respectivement par $s(x) = 8x$ et $A(x) = 4x + 20$.

5) Déterminer par lecture graphique, en faisant apparaître sur le dessin les tracés nécessaires :A partir de combien de spectacle le tarif A est plus avantageux.



SE PERFECTIONNER

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R(O,I,J)$.

On considère les points A(-3,5) et B((7,1)

Soit la fonction affiné f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

1) Représenter graphiquement f dans le repère R.

2) a) Déterminer la fonction affine g ayant pour représentation graphique la droite (AB)

b) Déterminer le point I intersection de Δf et Δg .

c) Résoudre graphiquement l'équation $|f(x)| = 1$

3) Déterminer les coordonnées des points M de Δf tel que $IM = \sqrt{5}$.



1 Q-C-M

1) R_4 2) R_2 3) R_2 et R_4 4) R_1 5) R_3

En effet :

1) $(-2)\times 4+3=-5$

2) $f(x)=27$ équivaut $-2x+3=27$ équivaut $-2x=24$ équivaut $x=-12$

3) $f(2)=2\times 2-3=1\neq 6$ alors $A\notin \Delta f$

$f(4)=2\times 4-3=5$ alors $B\in \Delta f$

$f(-2)=2(-2)-3=-7\neq 7$ alors $C\notin \Delta f$

$f(20)=2\times 20-3=37\in \Delta f$

4) $a=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=\dfrac{(-2)-3}{1}=-5$

5) $A(2,-3)\in \Delta f$ équivaut $f(2)=-3$

équivaut $(2m-6)\times 2+5=-3$

équivaut $2m-6=-4$

équivaut $2m=2$

équivaut $m=1$

2 VRAI-FAUX

1) Vrai en effet :

* Après la 1ère augmentation de 20 % le prix devient $x+\dfrac{20}{100}x=1,2x$

* Après la réduction de20 % le prix dévient

$(1,2x)-\dfrac{20}{100}(1,2x)=1,2x-0,24x=0,96x$

* Après l'augmentation de prix de 10 dinars le prix devient $f(x)=0,96x+10$

2) Vrai en effet :

$g(x)=4x-1$

On a : $\Delta f\,//\,\Delta g$ alors $f(x)=4x+b$

$A(2,-3)\in \Delta f$ alors $f(2)=-3$ alors

$4\times 2+b=-3$ alors $b=-11$ alors $f(x)=4x-11$

3) a) Faux en effet : On a f est constante si $2m-2=0$ si $m=1$

b) Vrai en effet $\Delta f\,//\,\Delta g$ si $2m-2=-4$ si $2m-2=-4$ si $2m=-2$ si $m=-1$

3 APPLIQUER

Rappel : f est une fonction affine si $f(x)=ax+b$

1) f est une fonction affine $a=3, b=4$

2) $g(x)=(4x-4)-4x=-4$

g est une fonction constante alors g est une fonction affine $a=0$ et $b=-4$

3) $h(x)=(3x-1)^2-9x^2$

$=(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2-9x^2$

$=9x^2-6x+1-9x^2=-6x+1$

alors h est une fonction affine $a=-6$ et $b=1$

4) t est une fonction linéaire alors t est une fonction affine $a=\dfrac{5}{2}$ et $b=0$

5) $h(x)=2x^2-4x+5$

On ne peut pas ramener l'écriture de $f(x)$ à la forme $ax+b$ alors h n'est pas une fonction affine.

4 APPLIQUER

$f(x)=5x+1$

1) $f(5)=5\times 5+1=26$

$f(-2)=5\times(-2)+1=-10+1=-9$

$f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=5\left(-\dfrac{1}{4}\right)+1=-\dfrac{5}{4}+1=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{4}{4}=-\dfrac{1}{4}$

2) *Soit x l'antécédent de 16 par f

Alors $f(x)=16$ alors $5x+1=16$ alors $5x=15$

alors $\boxed{x=3}$

*Soit x l'antécédent de -9 par f.

Alors $f(x)=-9$ alors $5x+1=-9$ alors

$5x=-10$ alors $\boxed{x=-2}$

*Soit x l'antécédent de $\dfrac{5}{2}$ par f

Alors $f(x)=\dfrac{5}{2}$ alors $5x+1=\dfrac{5}{2}$ alors $5x=\dfrac{5}{2}-1$

alors $5x=\dfrac{3}{2}$ alors $\boxed{x=\dfrac{3}{10}}$

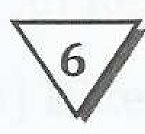


APPLIQUER

1/ $f(-10)=14$ équivaut $2(-10)+b=14$
équivaut $b=34$

2/ $g(2)=5$ équivaut $a\times 2+4=5$ équivaut

$2a=1$ équivaut $a=\dfrac{1}{2}$



APPLIQUER

1) f est une fonction affine alors $f(x)=ax+b$

* $a=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{8-2}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

*On a $f(3)=8$ alors $a\times 3+b=8$ alors

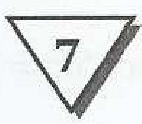
$\dfrac{3}{2}\times 3+b=8$ Alors $\dfrac{9}{2}+b=8$ alors

$b=8-\dfrac{9}{2}=\dfrac{16}{2}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{7}{2}$

Conclusion $f(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}$

2) f est une fonction affine alors $f(x)=ax+b$

- $a=\dfrac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\dfrac{5-(-5)}{5}=\dfrac{10}{5}=2$
- $f(4)=5$ équivaut $a\times 4+b=5$
  équivaut $2\times 4+b=5$
  Equivaut $b=-3$
  Conclusion $f(x)=2x-3$



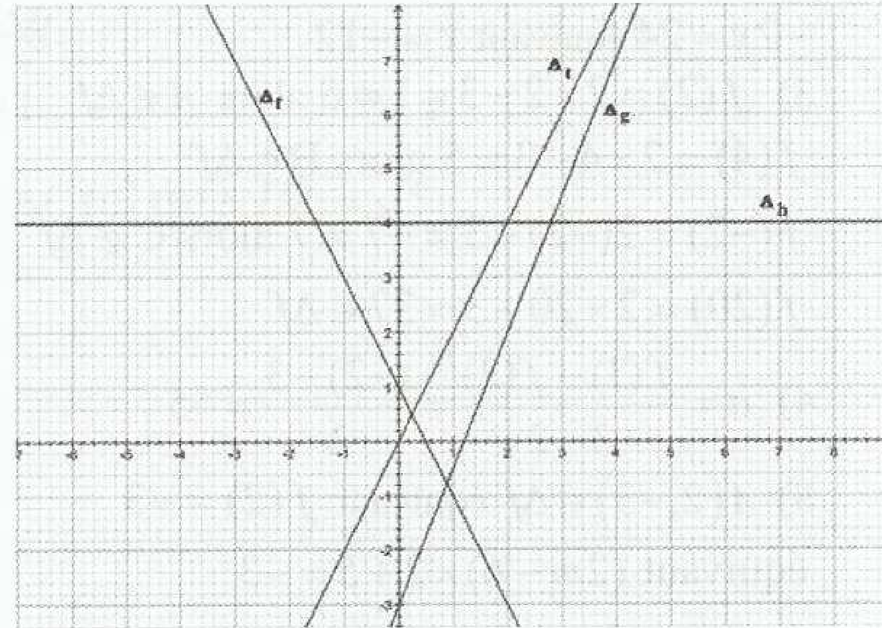
APPLIQUER

1) f est une fonction affine alors sa représentation graphique Δf est une droite qui passe par les points des cordonnées $(0,1)$ et $(2,-3)$
Car f(0) =1 et f(2) = -3

2) g est une fonction affine alors sa représentation graphique est une droite Δg qui passe par les points des coordonnées $(0,-3)$ et $(2,2)$
Car g(0) = -3 et g(2) =2

3) h est une fonction constante alors se représentation graphique est une droite Δh qui passe par les points des coordonnées $(0,4)$ et $(2,4)$
Car h(0) =4 et h(2) = 4

4/ t est une fonction linéaire alors représentation graphique est une droite qui passe par O et par le point des cordonnées $(1,2)$ car t(1) =2





APPLIQUER

$f(x)=2x+5$

1/* $f(-3)=2(-3)+5=-6+5=-1$
alors $\boxed{A(-3,-1)\in\Delta f}$

* $f(4)=2\times 4+5=13\neq -10$
alors $\boxed{B(4,-10)\notin\Delta f}$

* $f(100)=2\times 100+5=205$
alors $\boxed{C(100,205)\in\Delta f}$

* $f(-20)=2\times(-20)+5=-40+5=-35\neq 35$
alors $\boxed{D(-20,35)\notin\Delta f}$

2/ $I(2m-3,m+5)\in\Delta f$ équivaut
$f(2m-3)=m+1$
Équivaut $2(2m-3)+5=m+1$
Équivaut $4m-6+5=m+1$
Équivaut $3m=2$
Équivaut $m=\dfrac{2}{3}$

9 APPLIQUER

On donne les points A(4,5) , B(2,1) et C(50, 97).

Soit la fonction affine f ayant pour représentation graphique la droite (AB).

1) On a f est une fonction affine alors f(x) = a x +b

A(4,5) d'où f(4) = 5

B(2,1) d'où f(2) =1

$$a=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-1}{2}=2$$

On f(4) =5 alors a × 4 + b = 5 alors 2 × 4 + b = 5 alors 8+ b = 5 alors b = - 3

D'où f(x) = 2x – 3

2) On a f(50)= 2× 50 – 3 = 97 alors C(50, 97) appartient à (AB) alors A,B et C sont alignés.

10 APPLIQUER

*Soit g la fonction affine ayant pour représentation graphique la droite (AB) on a : $g(x)=ax+b$

On a : $A(2,4)$ alors $g(2)=4$

$B(5,-2)$ alors $g(5)=-2$

On a :

$$a=\frac{g(2)-g(5)}{2-5}=\frac{4-(-2)}{-3}$$

$$=\frac{6}{-3}=-2 \text{ alors } g(x)=-2x+b$$

*On a : $\Delta f\,//\,(AB)$ alors $f(x)=-2x+b'$



* $C(5,1)\in\Delta f$ Équivaut f(5)= 1 équivaut

$-2\times5+b'=1$ équivaut $b'=11$

Conclusion : $f(x)=-2x+11$

11 APPLIQUER

1) $f(x)=-x+3$ et $g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

a)

* f est une fonction affine alors sa représentation graphique est une droite Df qui passe par les points des coordonnées (0,3) et (3,0)(car f(0)= 3 et f(3) =0)

* g est une fonction affine alors Dg est une droite qui passa par les points des coordonnées $(0,\frac{3}{2})$ et (2,3) (car $f(0)=\frac{3}{2}$ et f(2) =3)

b) K(x,y) ∈ Dg ∩Df signifie y = g(x) et y = f(x)

D'où $\boxed{f(x)=g(x)}$

- On a f(x) = g(x) signifie

$-x+3=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ signifie $-x-\frac{3}{4}x=\frac{3}{2}-3$

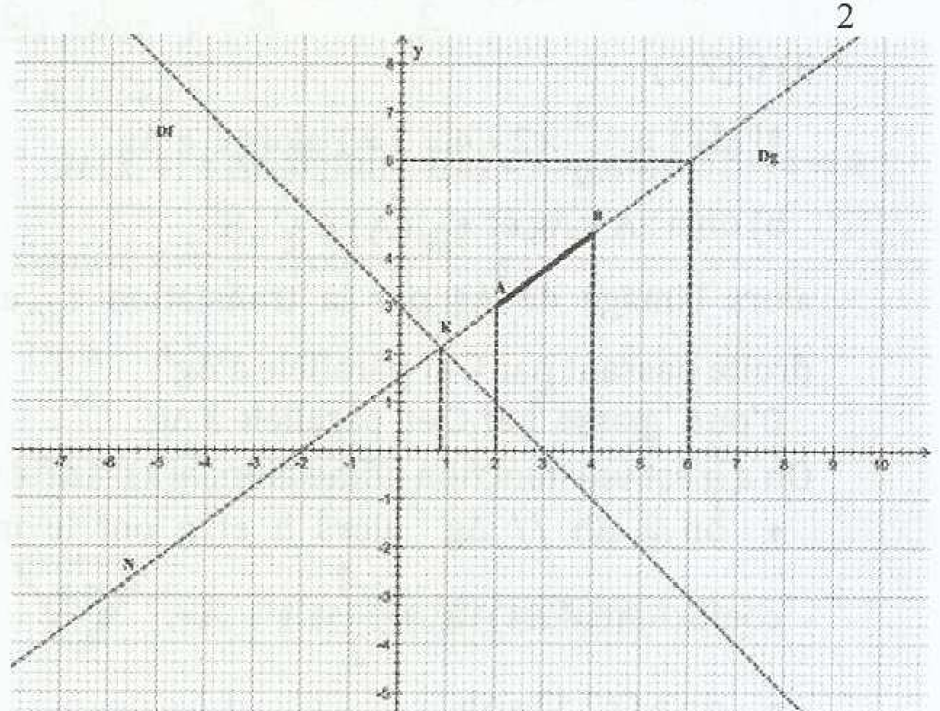
signifie $-\frac{7}{4}x=-\frac{3}{2}$ signifie $x=\frac{3}{2}\times\frac{4}{7}$

signifie $\boxed{x=\frac{6}{7}}$

Pour $x=\frac{6}{7}$ on a y = $g(\frac{6}{7})=-\frac{6}{7}+3=-\frac{6}{7}+\frac{21}{7}=\frac{15}{7}$

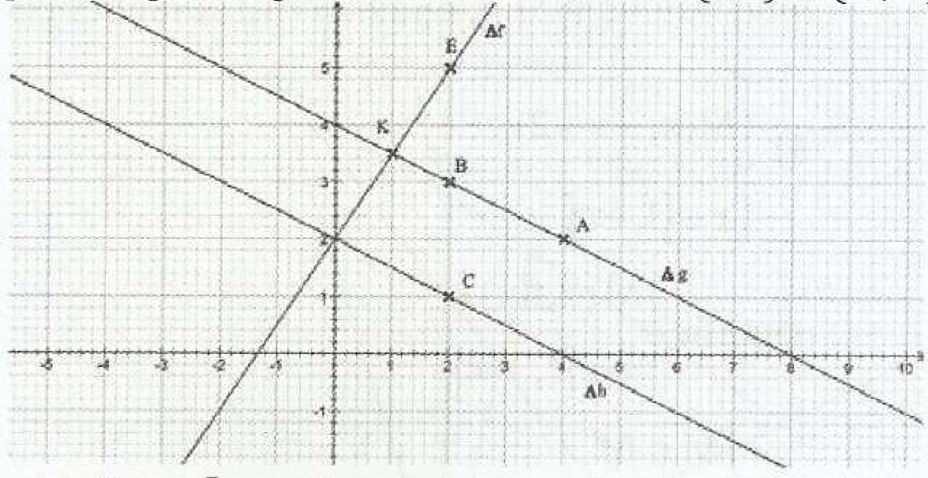
Conclusion $\boxed{K\left(\frac{6}{7},\frac{15}{7}\right)}$

2) La représentation graphique de la restriction de la fonction affine f à l'intervalle [2,3]
est <u>la partie de Df qui correspond à l'intervalle [2,4]</u>
c'est le segment [AB] de Df avec A(2,3) et B(4,$\frac{9}{2}$)



12 S'ENTRAINER

1) a) f est une fonction affine alors Δf est une droite passant par les points des coordonnées (0,2) et (-2,-1)



b) f(x) = 5 signifie x est l'antécédent de 5 par f, d'où $x=2$, $S_{\mathbb{R}}=\{2\}$

2) a) Lla représentation graphique de g est la droite (AB)

b) On a g est une fonction affine alors g(x)=ax +b

$A(4,2) \in \Delta g$ signifie $g(4) = 2$

$B(2,3) \in \Delta g$ signifie $g(2) = 3$

* $a = \dfrac{g(4)-g(2)}{4-2} = \dfrac{2-3}{2} = \dfrac{-1}{2}$

* On a $g(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2 + b = 3 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 2 + b = 3$

$\Leftrightarrow -1 + b = 3 \Leftrightarrow b = 4$

D'où $\boxed{g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 4}$

c) $K(x,y) \in \Delta f \cap \Delta g$

$\Leftrightarrow y = f(x)$ et $y = g(x)$ D'ou $f(x) = g(x)$

équivaut $\dfrac{3}{2}x + 2 = -\dfrac{1}{2}x + 4$ équivaut $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x = 2$

équivaut $2x = 2$ équivaut $x = 1$

Pur x = 1on a $f(1) = \dfrac{3}{2} \times 1 + 2 = \dfrac{7}{2}$. D'où $\boxed{K(1, \dfrac{7}{2})}$

3) C (2,1)

a) $g(2) = -\dfrac{1}{2} \times 2 + 4 = 3 \neq 1$ alors $C \notin \Delta g$

b) on a : $A \in \Delta g$ et $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$.

alors l'image de Δg par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$ est la droite passant par C et parallèle à Δg.

D'ouΔ' passe par C et parallèle à Δg.

On a h est une fonction affine alors $h(x) = a'x + b'$

- on a $\Delta h \,//\, \Delta g$ alors h et g ont le même coefficient alors $a' = \dfrac{-1}{2}$
- on a $C(2,1) \in \Delta h$

alors $a' \times 2 + b' = 1$

alors $\left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 2 + b' = 1$ alors $b' = 2$

Conclusion : $\boxed{h(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2}$

4) $\begin{cases} M(x, \dfrac{3}{2}x + 2) \\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$

signifie $\begin{cases} M(x, f(x)) \\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$

sig $\begin{cases} M \in \Delta f \\ \text{et } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

L'ensemble des points M est la partie de Δf tel que $x \in [1, +\infty[$



13 S'ENTRAINER

1) L'image de – 3 est 2 et l'antécédent de –6 est 4

2) f est une fonction affine alors $f(x) = ax + b$

$E(-2,4) \in \Delta f$ signifie $f(-2) = 4$ $F(2,12) \in \Delta f$ signifie f(2)=12

D'où $a = \dfrac{f(-2) - f(2)}{-2-2} = \dfrac{4-12}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

On a : $f(2) = 12$

signifie $a \times 2 + b = 12$

signifie $2 \times 2 + b = 12$ signifie b = 8

Conclusion : $\boxed{f(x) = 2x + 8}$

3) $g(x) = -2x + 14$

a) g est une fonction affine alors sa représentation graphique Δg est une droite qui passe par les points des coordonnées (2, 10) et (3 ,8) (car g(2)=10 et g(3) = 8).

b) * On a : $H(x,0) \in \Delta g$ signifie $g(x) = 0$

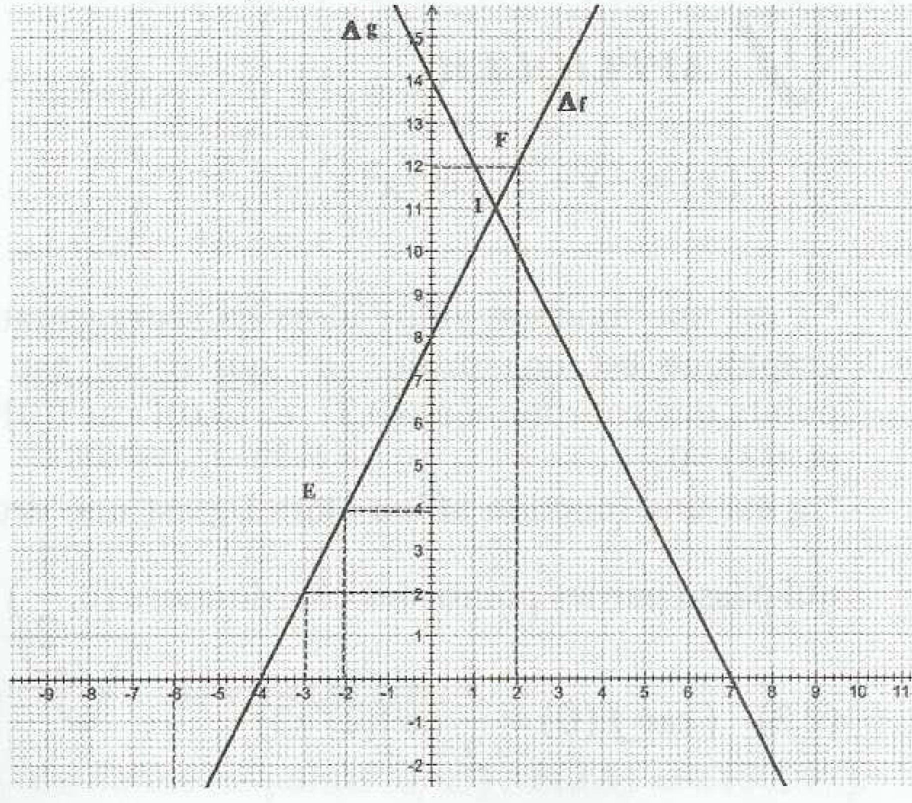
signifie $-2x + 14 = 0$ signifie $x = 7$, d'où $\boxed{H(7,0)}$

* $K(0,y) \in \Delta g$ signifie $g(0) = y$ signifie 14 = y d'où $\boxed{K(0,14)}$

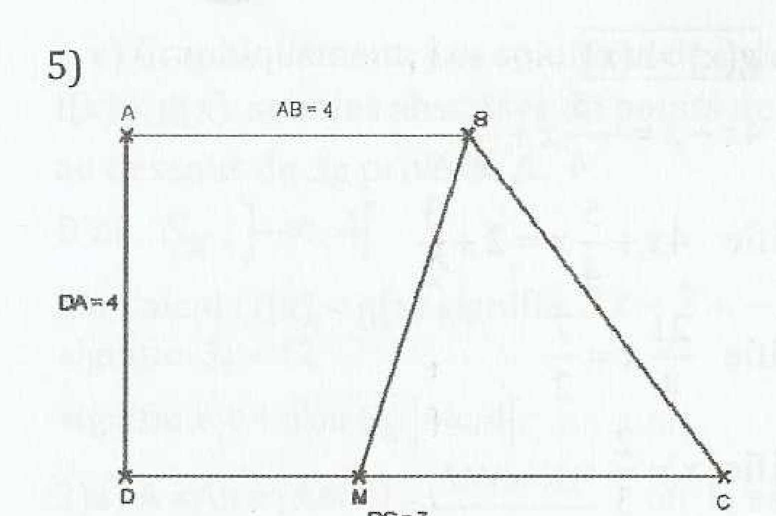
4/ Si $I(x,y) \in \Delta f \cap \Delta g$ alors $f(x) = g(x)$ alors

$-2x + 14 = 2x + 8$ alors $4x = 6$ alors $x = \dfrac{3}{2}$

Alors $y = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2 \times \dfrac{3}{2} + 8 = 11$ alors $\boxed{I(\dfrac{3}{2}, 11)}$



5)



a) Aire (MBC)

$= \dfrac{AD \times MC}{2} = \dfrac{4 \times (7 - x)}{2} = -2x + 14 = g(x)$

$\text{Aire}(ABMD) = \dfrac{(DM + AB) \times AD}{2} = \dfrac{(x+4) \times 4}{2}$

$= 2x + 8 = f(x)$

b) Graphiquement les solutions de l'inéquation $g(x) \leq f(x)$ sont les abscisses des points de Δg situés au dessous de Δf de $S_{IR} = \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

c) A ire (MBC) ≤ A ire (ABMD) signifie

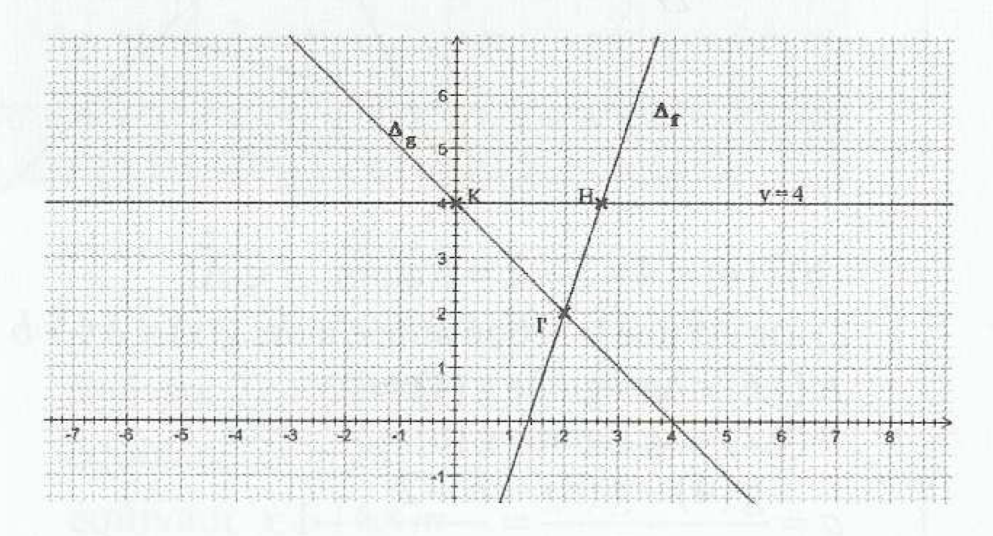
$g(x) \leq f(x)$ et $x \in]0,7[$ (car 0<DM<7)

signifie $x \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et $x \in]0,7[$

signifie $x \in \left[\dfrac{3}{2}, 7\right[$



SE PERFECTIONNER



$f(x) = 3x - 4$

1) * $f(-2) = 3 \times 2 - 4 = 2$

$*f(x) = 6 \Leftrightarrow 3x - 4 = 6 \Leftrightarrow 3x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{3}$

2) f est une fonction affine alors sa représentation graphique est une droite Δf

On a : $f(0) = -4$ alors $A'(0,-4) \in \Delta f$

$f(3) = 5$ alors $B'(3,5) \in \Delta f$

Alors $\Delta f = (A'B')$

3) $A(3,1), B(-2,6)$

a) On a g est une fonction affine alors $g(x) = ax + b$

$* \ a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6-1}{-2-3} = -1$

$*$ $A(3,1) \in \Delta g$ signifie $a \times 3 + b = 1$ Signifie $-3 + b = 1$ alors $b = 4$

Alors $g(x) = -x + 4$

b) $f(x) = g(x)$ signifie $3x - 4 = -x + 4$ signifie $4x = 8$ signifie $x = 2$

$f(2) = 3 \times 2 - 4 = 2$

Alors $I'(2,2)$

4) Pour $y = 4$:

$*K(0,4)$

$*$ $H(x,4) \in \Delta f$ signifie f(x) =4 signifie $3x - 4 = 4$ signifie $x = \dfrac{8}{3}$ d'où $H\left(\dfrac{8}{3}, 4\right)$.

On a : A ire

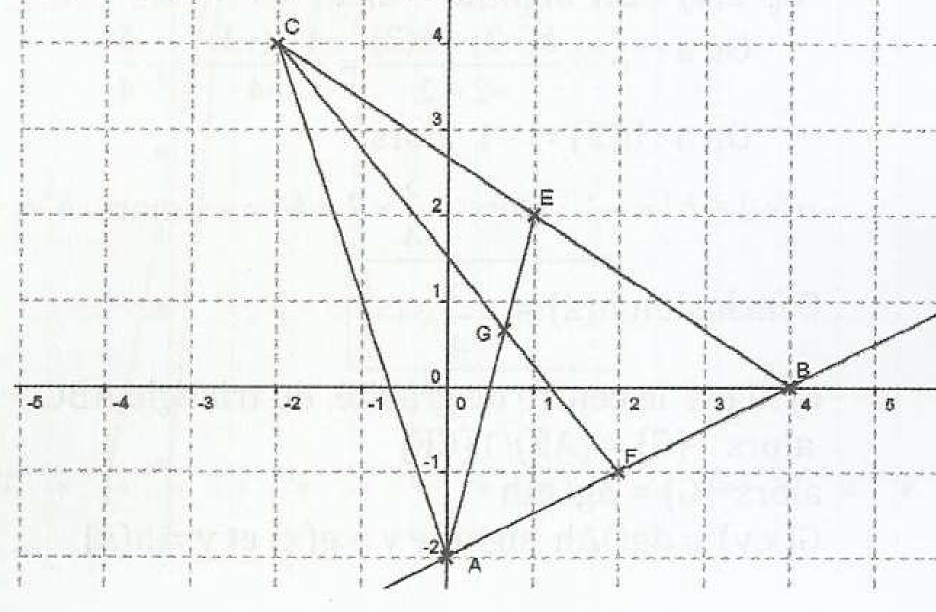
$(HKI') = \dfrac{|x_H - x_K| \times |y_K - y_{I'}|}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}(4-2)}{2} = \dfrac{8}{3}$



SE PERFECTIONNER

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$

a) f est une fonction affine alors sa représentation graphique Δf est une droite passant par les points des coordonnées (0,-2) et (2,-1) (car f(0) = - 2 et f(2) = - 1)



2) A(0,y)∈Δf Signifie f(0) = y signifie

$\frac{1}{2}\times 0-2=y$ Signifie y = - 2 d'où A(0,- 2)

B(x,0)∈Δf Signifie f(x) = 0 signifie

$\frac{1}{2}\times x-2=0$ Signifie x = 4 d'où B(4,0)

3) C(-2 ,4) , E le milieu de [BC] et F le milieu de [AB]

a) Δg = (AE) on a : g est une fonction affine alors g(x) =a x + b

* E le milieu de [BC] signifie

$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}$ et $y_E=\frac{y_B+y_C}{2}$

signifie $x_E=\frac{4-2}{2}$ et $y_E=\frac{0+4}{2}$ signifie

$x_E=1$ et $y_E=2$ D'où E(1, 2)

E(1, 2)∈Δg Signifie g(1) =2

* A(0,- 2) ∈Δg Signifie g(0) = – 2

On a : $a=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=\frac{2-(-2)}{1}=4$

On a : g(0) = -2 alors

$a\times 0+b=-2$ alors $b=-2$

Conclusion g(x) = 4x - 2

a) Δh = (CF) ; h est une fonction affine alors h(x) =a' x + b'

* F le milieu de [AB] signifie

$x_F=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_F=\frac{y_A+y_B}{2}$

signifie $x_F=\frac{0+4}{2}=2$ et $y_E=\frac{-2+0}{2}=-1$

D'où F(2, - 1)

F(2, - 1)∈Δh Signifie h(2) = - 1

*C(- 2,4) ∈Δh Signifie h(-2) = 4

On a : $a'=\frac{h(-2)-h(2)}{-2-2}=\frac{4-(-1)}{-4}=-\frac{5}{4}$

On a : h(2) = - 1 alors

$a'\times 2+b'=-1$ alors $-\frac{5}{4}\times 2+b'=-1$ alors $b'=\frac{3}{2}$

Conclusion $h(x)=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$

c) G est le centre de gravité du triangle ABC alors {G} = (AE)∩ (CF)

alors {G} = Δg∩Δh

G(x,y) ∈Δg∩Δh signifie y = g(x) et y = h(x)

D'où g(x) =h(x)

D'où $4x-2=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$

signifie $4x+\frac{5}{4}x=2+\frac{3}{2}$

signifie $\frac{21}{4}x=\frac{7}{2}$

signifie $x=\frac{2}{3}$

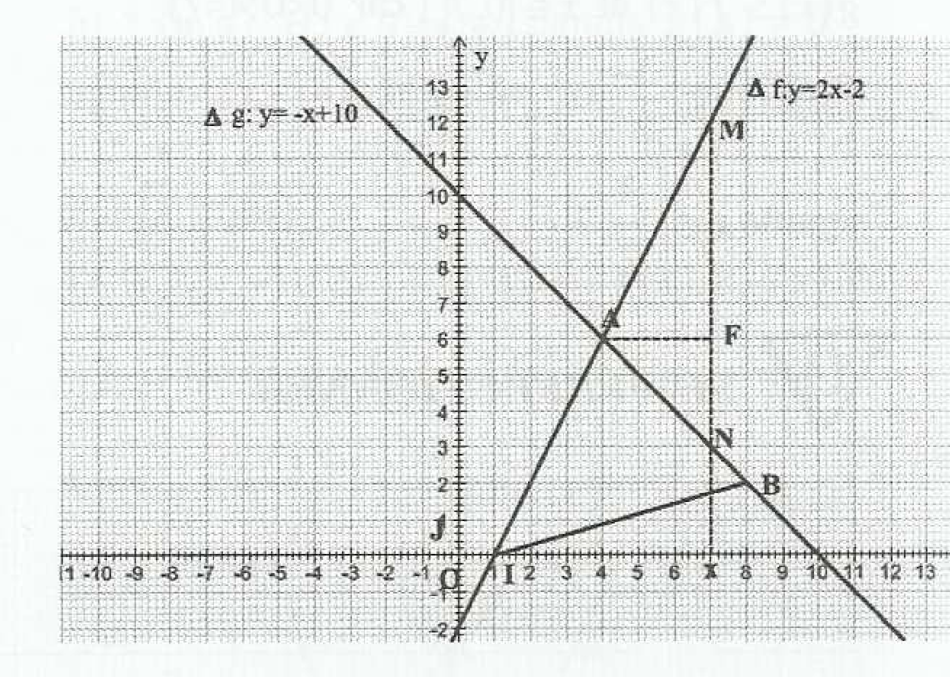
On $y=h\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times 4-2=\frac{8}{3}-\frac{6}{3}=\frac{2}{3}$

Conclusion $G\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

16 SE PERFECTIONNER

$f(x)=2x-2$ A(4,6) et B(8,2)

1)a) f est une fonction affine, alors sa représentation graphique Δf qui passe par les points de coordonnées (1,0) et (2,2)



b) f (4) = 4×2−2 = 6 alors $A\in\Delta f$

2) a)g est une fonction affine, alors g(x) $=ax+b$

A (4,6) ∈Δg signifie g (4) = 6

B (8,2) ∈Δg signifie g (8) = 2

$a=\frac{g(4)-g(8)}{4-8}=\frac{6-2}{-4}=-1$

$g(4)=6$ sig $a\times 4+b=6$ sig $(-1)\times 4+b=6$

sig $b=10$ d'ou $g(x)=-x+10$

b) Δf et Δg ne sont pas parallèles donc il n'existe pas une translation tel que l'image de (AB) par cette translation est égale Δf

c) Graphiquement: Les solutions de inéquation f(x) < g(x) sont les abscisses de points de Δf situés au dessous de Δg privé de A.

D'où $S_{\mathbb{R}} :]-\infty, 4[$

Par calcul : f(x) < g(x) signifie $2x-2<-x+10$

signifie $3x<12$

signifie $x<4$ d'ou $S_{\mathbb{R}}]-\infty, 4[$

3)a) A =Aire (AMN) $= \dfrac{MN \times AF}{2}$ où F est le projeté orthogonal de A sur (MN)

$= \dfrac{|y_M - y_N| \times |x_F - x_A|}{2}$

$= \dfrac{|f(x)-g(x)| \times |x-4|}{2}$

$= \dfrac{((2x-2)-(-x\times 10))\times(x-4)}{2} = \dfrac{(3x-12)(x-4)}{2}$

b) A = 24

signifie $\dfrac{(3x-12)(x-4)}{2} = 24$

signifie $3x^2-12x-12x+48=48$

signifie $3x^2-24x=0$

signifie $3x(x-8)=0$

signifie $x=0$ ou $x-8=0$

signifie $x=0$ ou $x=8$

Or x >0 alors x = 8



17 SE PERFECTIONNER

1/ $f(x)=40+2x$ et $g(x)=4x$

2/ Pour $x=12Km$ on a

$f(x)=40+2\times 12=40+24=64D$

$g(x)=4\times 12=48D$

3/ $f(x)=68$ équivaut $40+2x=68$

équivaut $2x=68-40$

équivaut $2x=28$

équivaut $x=14Km$

4/ $f(x)=g(x)$ équivaut $f(x)=g(x)$

équivaut $40+2x=4x$

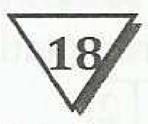
équivaut $2x=40$

équivaut $x=20Km$

5/ si $g(x)>f(x)$ alors $4x>40+2x$ alors

$2x>40$ alors $x>20$

L'entreprise B est plus intéressante pour un client à partir de 21 Km de parcours.



18 SE PERFECTIONNER

1/

Nombre de spectacles	4	9	15
Dépense de Sami en D	32	72	120
Dépense de Amine en D	36	56	80

Pour le tarif S on a : $4\times 8=32\ D$

$9\times 8=72\ D$

$15\times 8=120\ D$

Pour le tarif A : $4\times 4+20=36$

$4\times 9+20=56$

$4\times 15+20=80$

2/ $S(x)=8x$ et $A(x)=4x+20$

3/ $8x=4x+20$ équivaut $4x=20$ équivaut $x=5$

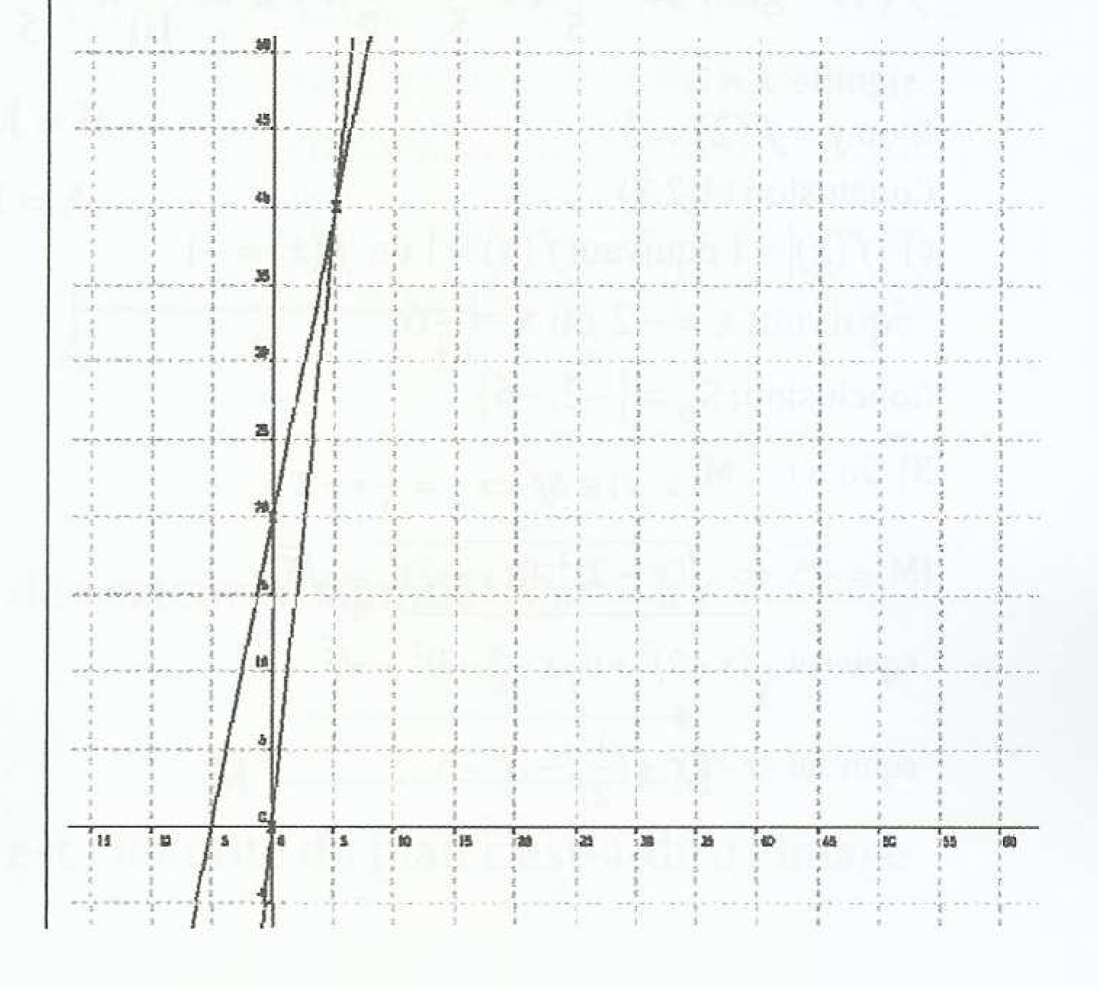
Pour 5 spectacles les tarifs S et P sont égaux.

4/ *On a S est fonction linéaire alors sa représentation graphique est une droite soit Δ passant par O et par le point de coordonnées ((5,40) car S(5) =40

* On a A est fonction affine alors sa représentation graphique est une droite soit Δ' passant par les points des coordonnées (0,20) et (5,40) car A(0) = 20 et A(5) =40

La droite représentative de la fonction $A(x)$.

5/ $S(x)>A(x)$ à partir de $x=6$ spectacles.

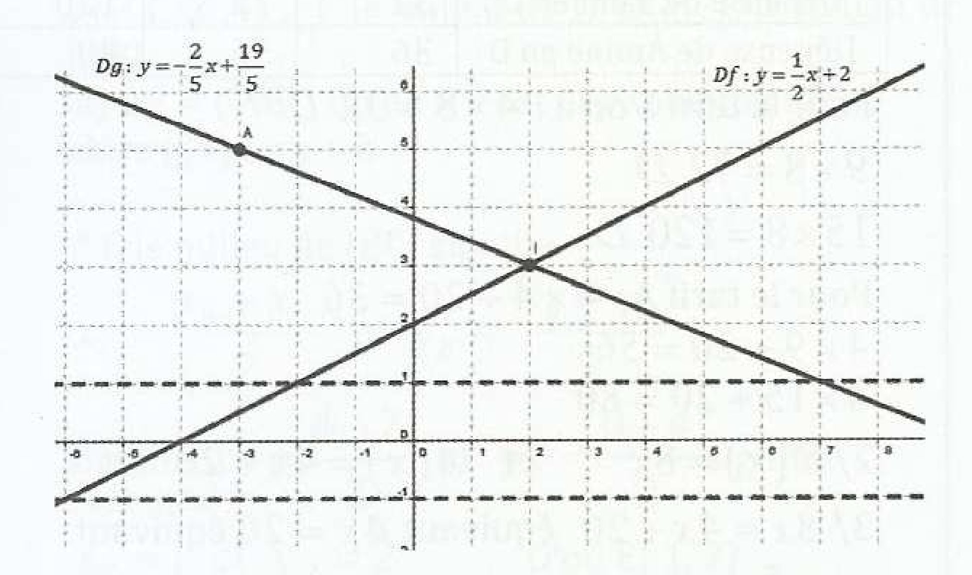




19 SE PERFECTIONNER

1) f est une fonction affine alors sa représentation graphique Δf est une droite

x	0	2
$f(x)$	2	3



2)a) On a : $g(x)=ax+b$

$A(-3,5)\in \Delta g$ signifie $g(-3)=5$ et $B(7,1)\in \Delta g$ signifie $g(7)=1$

On a : $a=\frac{g(-3)-g(7)}{-3-7}=\frac{5-1}{-10}=\frac{4}{-10}=-\frac{2}{5}$

On a : g(7) = 1 signifie $a\times 7+b=1$ signifie

$-\frac{2}{5}\times 7+b=1 \Leftrightarrow b=\frac{19}{5}$ .D'ou $g(x)=-\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}$

b) $I(x,y)\in \Delta f\cap \Delta g$ alors

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}=\frac{1}{2}x+2\Leftrightarrow \frac{9}{10}x=\frac{9}{5}$

signifie x = 2.

D'ou y = $f(2)=3$

Conclusion : I(2,3)

c) $|f(x)|=1$ équivaut $f(x)=1$ ou $f(x)=-1$

équivaut $x=-2$ ou $x=-6$

Conclusion: $S_{\mathbb{R}}=\{-2,-6\}$

3) On a : $M(x,y)\in \Delta f \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+2$

$IM=\sqrt{5}\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{5}$

équivaut $\sqrt{(x-2)^2+(\frac{1}{2}x+2-3)^2}=\sqrt{5}$

équivaut $(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2=5$

équivaut $\frac{5}{4}x^2-5x=0$

équivaut $x(\frac{5}{4}x-1)=0$

D'où $x=0$ *ou* $x=4$

- Si $x=0$ alors $y=2$ alors M(0,2)
- Si $x=4$ alors $y=4$ alors $M(4,4)$

Vecteurs et translations

I) Résumé du cours :

A. Vecteurs :

- Deux points A et B pris dans cet ordre constituent le bipoint (A, B) et définissent le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un objet mathématique caractérisé par
- ✦ **Sa direction:** la direction de la droite (AB)
- ✦ **Son sens :** le sens de A vers B A ⟶ B
- ✦ **Sa longueur :** la longueur AB

Le point A s'appelle l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Le point B s'appelle l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Remarque : Si A = B alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$, on lit le vecteur nul.

Propriétés :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à [AD] et [BC] ont le même milieu
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- <u>A, B et C non alignés</u>
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme
- (Attention à l'ordre des lettres)
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors AB = CD et (AB) // (CD)
- A et B deux points, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à M = B.
- A et B deux points, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à M = A.
- I le milieu de [AB] signifie que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

A I B

B. Translations :

Définition :

M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$\vec{u}$

M ⟶ M'

- <u>**Remarque :**</u> la translation du vecteur nul est l'identité du plan c'est-à-dire l'image d'un point M est M

<u>**Propriétés :**</u> Toute translation converse :
- Les distances : AB = A'B'.

- Les mesures des angles $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$.
- L'alignement : A, B, C sont alignés alors A', B' et C' sont alignés.
- Les milieux
- Le parallélisme : (AB) // (CD) alors (A'B') // (C'D') .
- L'orthogonalité : (AB) $\perp$ (CD) alors (A'B') $\perp$ (C'D').

(A', B' C' et D' sont les images respectives de A, B , C et D par une translation)

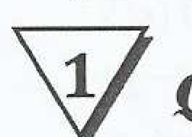
L'image par une translation :

- D'un segment est un segment
- D'une droite est une droite qui lui est parallèle

En particulier | si (AB)//Δ alors $t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta) = \Delta$ |

- D'un cercle $\mathscr{C}_{(0,\,R)}$ est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' l'image de O et de même rayon.

II) Exercices :



Q-C-M

Répondre par vrai ou faux en justifiant

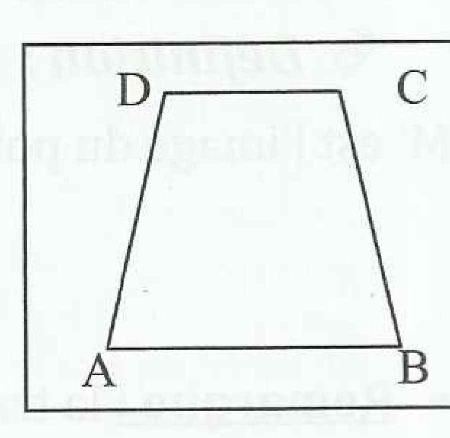
1) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme
2) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors AD =BC
3) si AB =DC et (AB)//(DC) alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



VRAI-FAUX

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) EFGH est un parallélogramme alors
   a) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ b) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GF}$ c) $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$
2) B est le milieu du segment $[AC]$ équivaut :
   a) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ d) BA=BC
3) ABCD est un trapèze :



On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

a) On a l'image de B est D

b) L'image de (AB) est (CD)

c) L'image de cercle de centre A et passant par B est le cercle de centre C et passant par D.

4) Soit A et B deux points distincts on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ signifie :
   a) M appartient à la médiatrice de [AB].
   b) M est le milieu de [AB].



3 APPLIQUER

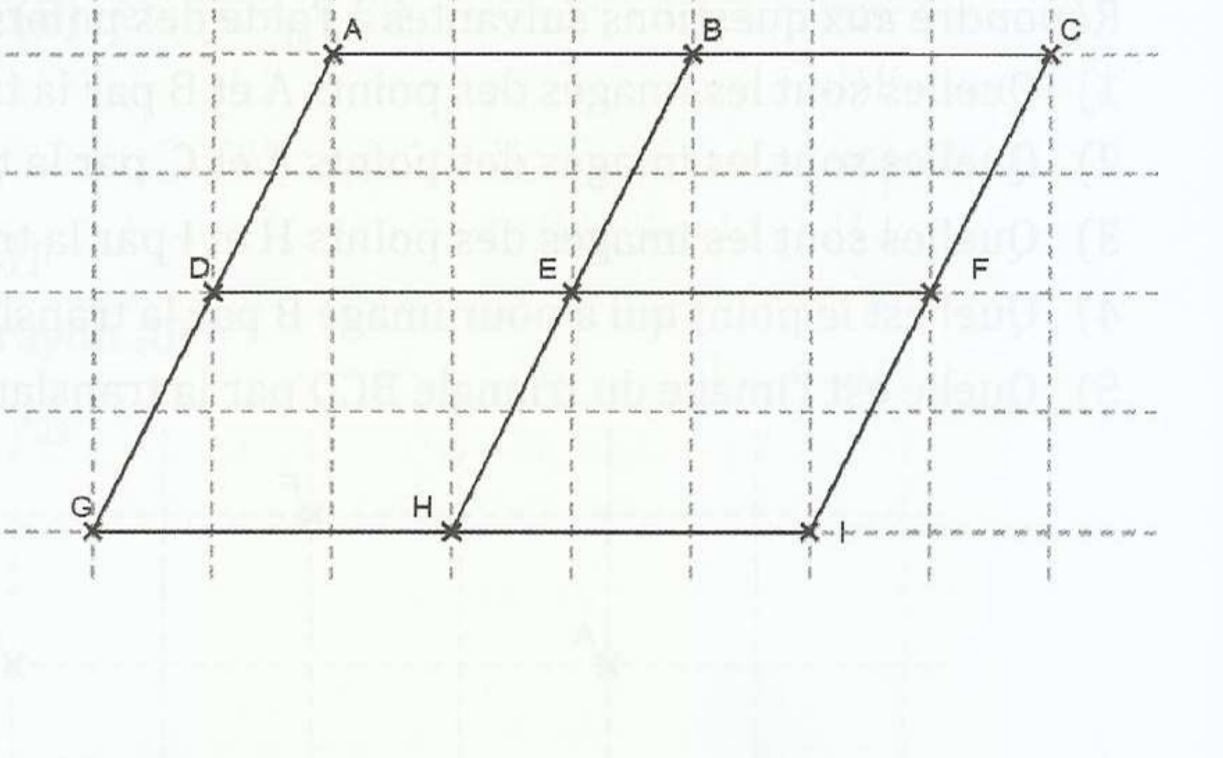
On considère la figure ci-dessous.

1) Nommer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$

2) Compléter les égalités suivantes par des points de la figure.

(a) $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{....F}$ (b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{.....H}$

(c) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{......I}$ (d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{I......}$





4 APPLIQUER

Soit ABC un triangle

1) Construire le point E et F tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$

2) Monter que C est le milieu de $[EF]$



5 APPLIQUER

Soit ABC un triangle

1) Construire le point E et F tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$

2) Monter que EBFC est un parallélogramme.



6 APPLIQUER

Sur la figure ci-dessous ABCD est un parallélogramme et le point F est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$? l'image de D ?

2) Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$? l'image de D ? l'image de E ?

3) Pourquoi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$?

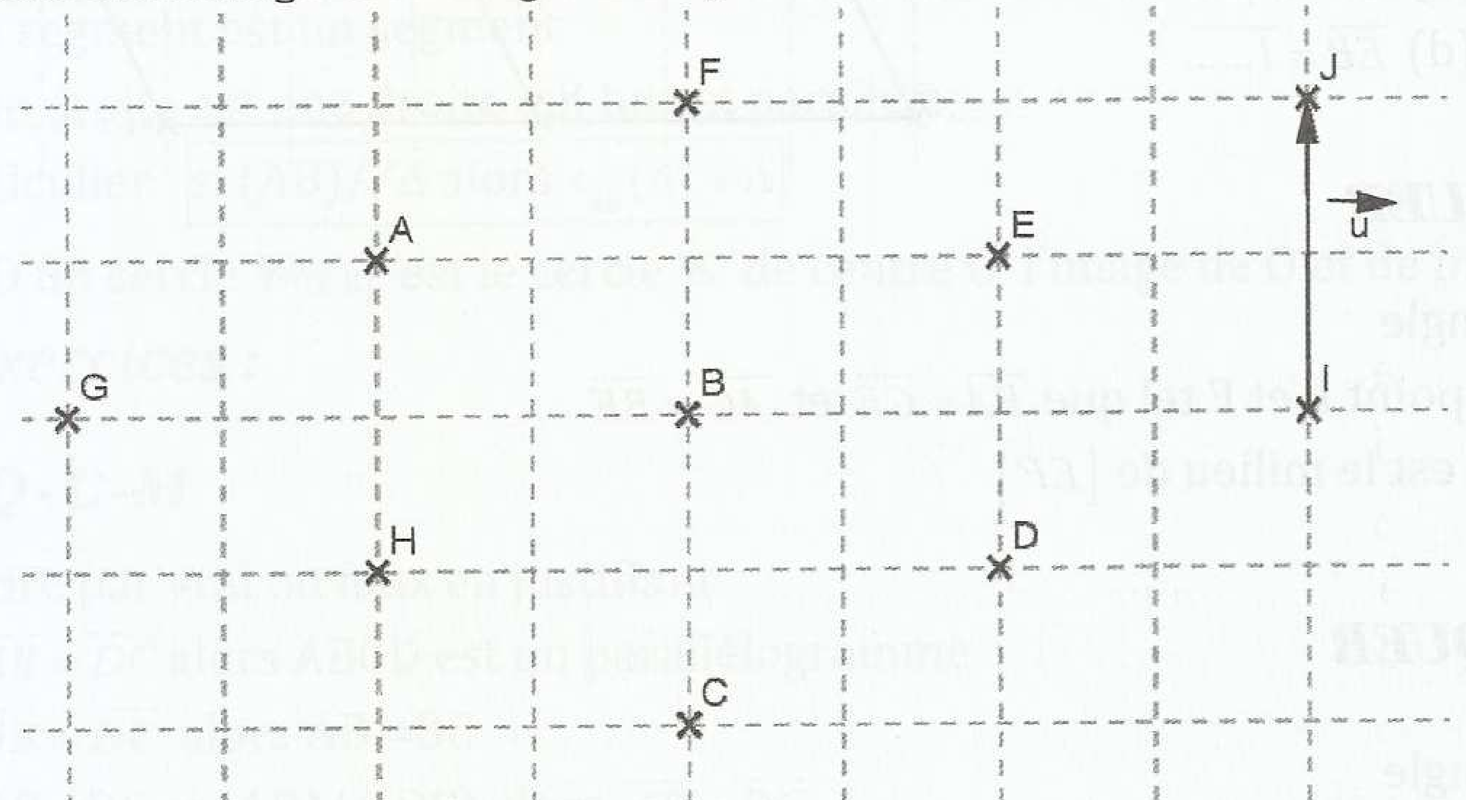
4) Recopier et compléter les égalités vectorielles : $\overrightarrow{CD} = ...$ $\overrightarrow{AD} = ...$

5) Montrer que ABFE est un parallélogramme.

7 APPLIQUER

Répondre aux questions suivantes à l'aide des points de la figure ci – dessous

1) Quelles sont les images des points A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$?
2) Quelles sont les images des points A et C par la translation de vecteur $\vec{u}$?
3) Quelles sont les images des points H et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$?
4) Quel est le point qui a pour image B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$?
5) Quelle est l'image du triangle BCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{IE}$?





S'ENTRAINER

Soit ABF un triangle On pose $C = t_{\overrightarrow{AB}}$ (B) et $F = t_{\overrightarrow{AB}}$(E) .

1) Construire C et E.
2) Montrer que $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$
3) Déterminer. $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EF))
4) Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EA))



S'ENTRAINER

On considère un parallélogramme ABCD

Soit les points I, K et H tels que : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$; I est le milieu de $[AK]$ *et* $t_{\overrightarrow{BC}}(C) = H$

1) Construire les points I, K et H
2) Déterminer les droites : $\Delta = t_{\overrightarrow{AD}}((BC))$ *et* $\Delta' = t_{\overrightarrow{AH}}((AD))$
3) Montrer que $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{DB}$

10 S'ENTRAINER

Soit ABF un triangle On pose C = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B) et F = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) .

1) Construire C et E.

2) Montrer que $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$

3) Détermine $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EF)) et $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EA)).

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon AB

a) Construire $\mathscr{C}'$ l'image de C par $t_{\overrightarrow{AB}}$

b) Montrer que C $\in \mathscr{C}'$.

11 S'ENTRAINER

On considère un triangle ABC tel que AB =5.

1) a) Construire D l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

b) Construire E l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

c) Montrer que ADCE est un parallélogramme.

2) Compléter :

- L'image de (DC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ est ....
- L'image de (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ est ....
- L'image de (BE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ est ....

3) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et de rayon 2, $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A et de rayon 2

Le cercle $\mathscr{C}$ coupe [AB] en I et $\mathscr{C}'$ coupe [AE] en J.

a) Monter que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b) Montrer que J est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

12 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle

1) Construire le point D = $t_{\overrightarrow{AC}}$ (B).

2) Soient Δ et Δ' les droites passant respectivement par B et D et perpendiculaires à (AC)

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$

b) Δ coupe (AC) en H et Δ' coupe (AC) en H' .Monter que $t_{\overrightarrow{AC}}$ (H) = H'.

3) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et passant par A. Déterminer et construire $\mathscr{C}' = t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C})$.



SE PERFECTIONNER

ABCD est un rectangle de centre O surmonté d'un triangle équilatéral I DC et tel que $\widehat{CAD} = 60°$. Soit H L'orthocentre du triangle IDC

1) Déterminer les images respectives de D,C et (IH) par la translation du vecteur $\overrightarrow{DA}$.

2) Montrer que l'image de (HD) par la translation du vecteur $\overrightarrow{DA}$ est (AC).

3) Montrer que O est l'image de H par la translation du vecteur $\overrightarrow{DA}$.

4) Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre C et passant par O.

Déterminer et construire $\mathscr{C}'$ l'image de C par la translation du vecteur $\overrightarrow{DA}$.

5) a) Déterminer une translation qui transforme (OI) en (DA)

b) Soit le cercle $\mathscr{C}''$ de centre D et passant par I, existe-t-il une translation qui transforme $\mathscr{C}''$ en $\mathscr{C}$.



SE PERFECTIONNER

Dans la figure ci-dessous Δ et Δ' sont deux droites sécantes.

A et B sont deux points distincts de Δ et D est un point de Δ'

Soit $C = t_{\overrightarrow{AB}}(D)$ et $E = t_{\overrightarrow{AC}}(D)$

A) 1) Construire C et E.

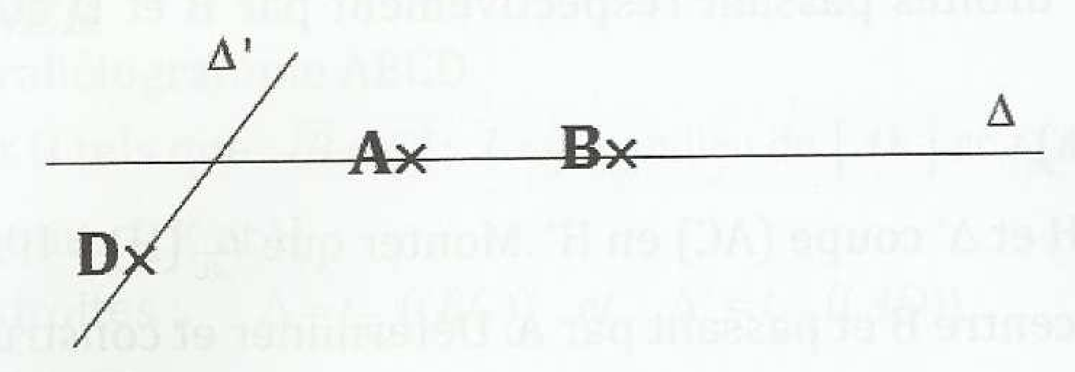
2) Montrer que C est le milieu du segment [EB]

3) Déterminer $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$, $t_{\overrightarrow{AC}}((DE))$.

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par B et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $\mathscr{C}$ et passant par D ; Montrer que $t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$

B) On suppose que A et B sont fixes et D est un point variable sur la droite Δ'

Déterminer et construire l'ensemble des points C lorsque D varie.





SE PERFECTIONNER

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre [CD] et soit A un point de $\mathscr{C}$ distinct de C et D.

1) Construire le cercle $\mathscr{C}$' l'image de $\mathscr{C}$ par la translation t de vecteur $\overrightarrow{CA}$.(on désigne par O' le centre de $\mathscr{C}$')

2) La droite (AC) rencontre $\mathscr{C}$'en B.La droite Δ passant par B et perpendiculaire à (AC) rencontre $\mathscr{C}$'en F

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{CA}}((AC))$

b) Montrer que $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

c) En déduire que $t_{\overrightarrow{CA}}((AD)) = (BF)$

3) Soit [AH] la hauteur issue de A dans le triangle ACD et [BH'] la hauteur issue B dans le triangle BCD. Montrer que $t_{\overrightarrow{CA}}((AH)) = (BH')$

4) On suppose que M est variable sur la droite (AH) et M' son image par $t_{\overrightarrow{CA}}$

Déterminer l'ensemble des point M' lorsque M varie.



SE PERFECTIONNER

Soit A et B deux points distincts du plan

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble E des points M du plan tel que :

1) MA= MB
2) AM =AB
3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$
4) AB = AM
5) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$
6) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
7) AM+BM = AB



1 Q-C-M

1) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme
Faux car il faut que A,B et C soient non alignés
2) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors AD =BC
Vrai car Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ alors AD =BC
3) si AB =DC et (AB)//(DC) alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
Faux car il faut que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ soient de même sens.

2 VRAI-FAUX

1) c) 2)b) 3)b) 4) c)

En effet

1) EFGH est un parallélogramme alors $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HE}$

1) B est le milieu du segment $[AC]$ équivaut $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ équivaut $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$
2) ABCD est un trapèze :
L'image de (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB) alors $t_{\overrightarrow{AC}}((AB))=(DC)$
3) Soit A et B deux points distincts on a $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ signifie :
M est le milieu de [AB]



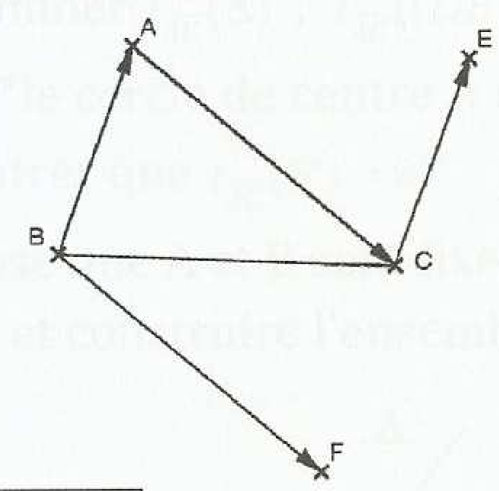
3 APPLIQUER

1) On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HI}$
2) a) $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{IF}$ b) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EI}$
d) $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{IF}$



4 APPLIQUER

1) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$



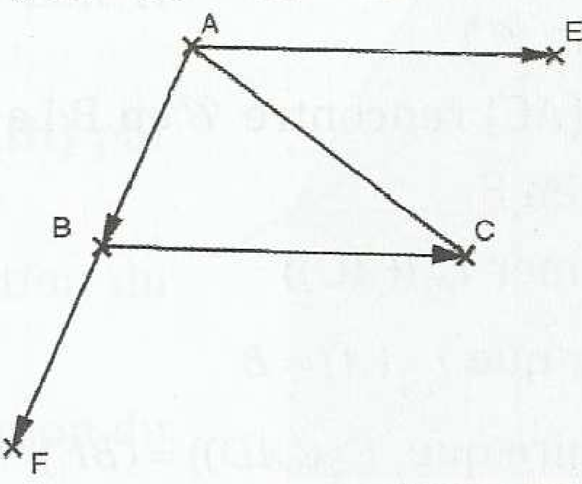
2) * On a $\boxed{\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CE}}$
* On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$ alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ alors $\boxed{\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{FC}}$

D'où $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{CE}$ d'où C est le milieu de [EF]



5 APPLIQUER

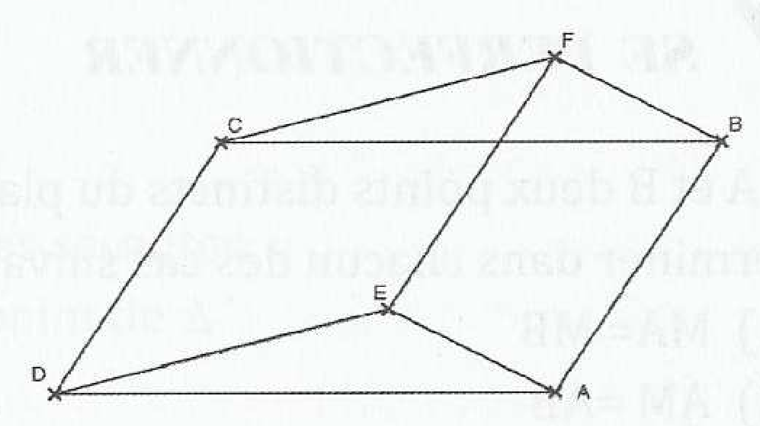
Soit ABC un triangle
1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}$



2) on a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}}$
Or $\boxed{\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}}$
alors $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BF}$ et puisque E,B et C ne sont pas alignés EBFC est un parallélogramme.



6 APPLIQUER



1) $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$ $t_{\overrightarrow{AB}}(D)=C$
2) $t_{\overrightarrow{DC}}(A)=B$ $t_{\overrightarrow{DC}}(D)=C$ $t_{\overrightarrow{DC}}(E)=F$
3) On a ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
On a : $t_{\overrightarrow{AB}}(E)=F$ alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ D'où $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}$
4) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
5) On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ et les points A,B et E ne sont pas alignés
D'où ABFE est un parallélogramme.



7 APPLIQUER

1) $t_{\overrightarrow{CD}}(A)=F$ $t_{\overrightarrow{CD}}(B)=E$
2) $t_{\vec{u}}(A)=H$ $t_{\vec{u}}(C)=B$

3) $t_{\overrightarrow{EF}}(H) = G$ $\quad t_{\overrightarrow{EF}}(I) = E$

4) $t_{\overrightarrow{AE}}(G) = B$

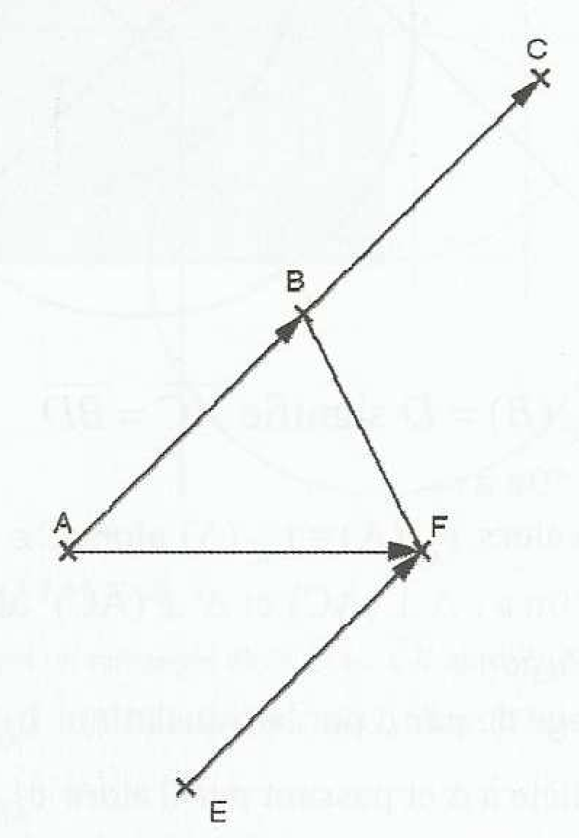
5) $t_{\overrightarrow{IE}}(BCD) = AHB$



8 S'ENTRAINER

1) $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B)= C signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) = F signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.



2) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$

On a $\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{AB}}(B) = C \\ t_{\overrightarrow{AB}}(E) = F \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ alors $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$

3) On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ alors (AB) // (EF) d'où $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EF)) =(EF)

4) $\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{AB}}(E) = F \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \end{array}\right\}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((EA)) = (FB)$



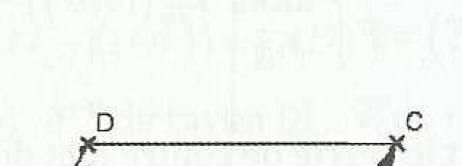
9 S'ENTRAINER

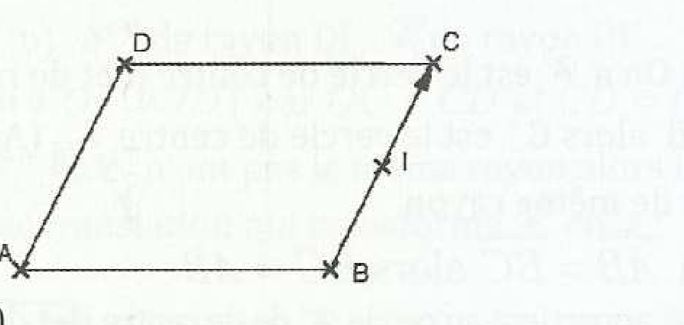
ABCD est un parallélogramme

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$; $t_{\overrightarrow{BC}}(C) = H$

I est le milieu de [AK]

1)





2)

*On a (BC)//(AD) alors $t_{\overrightarrow{AD}}((BC)) = (BC)$ alors $\Delta = (BC)$

* L'image de (AD) par $t_{\overrightarrow{AH}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{AH}}(A) = H$ et parallèle à (AD) alors l'image de (AD) par $t_{\overrightarrow{AH}}$ est (BC) alors $\Delta' = (BC)$

3) Montrons que $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{DB}$?

- On C est le milieu de [BH]
- On I est le milieu de [BC] , I le milieu de [AK] et A,B et C ne sont pas alignés alors ABKC est un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB}$.

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CK}$ alors C est le milieu de [DK]

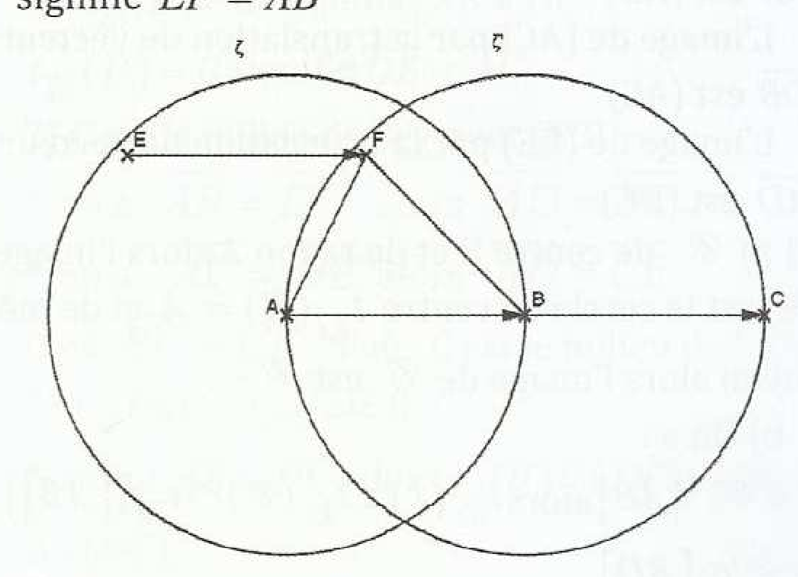
Conclusion : C est le milieu de [BH] et [DK] alors $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{DB}$



10 S'ENTRAINER

ABF un triangle , C = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B) et F = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) .

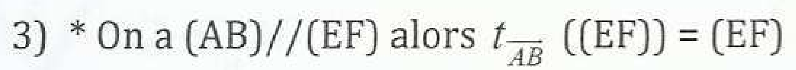
1) C = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (B) signifie $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ et F = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (E) signifie $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$



2) On a :

$\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{AB}}(B) = C \\ t_{\overrightarrow{AB}}(E) = F \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ alors $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = F$

3) * On a (AB)//(EF) alors $t_{\overrightarrow{AB}}$ ((EF)) = (EF)



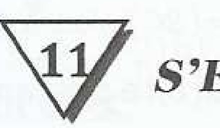
* On a $\left.\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \\ t_{\overrightarrow{AB}}(E)=F \end{array}\right\}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AE))=(BF)$

4)

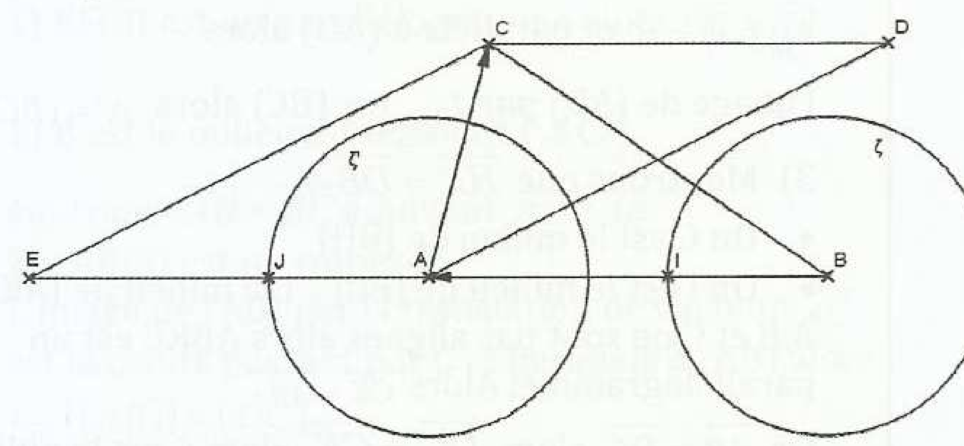
a) On a $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon AB alors C ' est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}$ (A)=B et de même rayon.

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ alors $BC = AB$.

alors $\mathscr{C}$ appartient au cercle $\mathscr{C}$' de de centre B et de rayon AB



11 S'ENTRAINER



1) a) D l'image de B par la translation de $\overrightarrow{AC}$ signifie de $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

b) E l'image de A par la translation de $\overrightarrow{BA}$ signifie $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}$

c) On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ or $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}$ alors $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}$

de plus A , D et C ne sont pas alignés alors AECD est un parallélogramme

2) L'image de (DC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ est (AB)

L'image de (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$ est (AC)

L'image de (BE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ est (DC)

3) a) $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 2 alors l'image de $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{BA}}(B)=A$ et de même rayon alors l'image de $\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}$ '

b) On a :

$I\in\mathscr{C}\cap[AB]$ alors $t_{\overrightarrow{BA}}(I)\in t_{\overrightarrow{BA}}(\mathscr{C})\cap t_{\overrightarrow{BA}}([AB])$

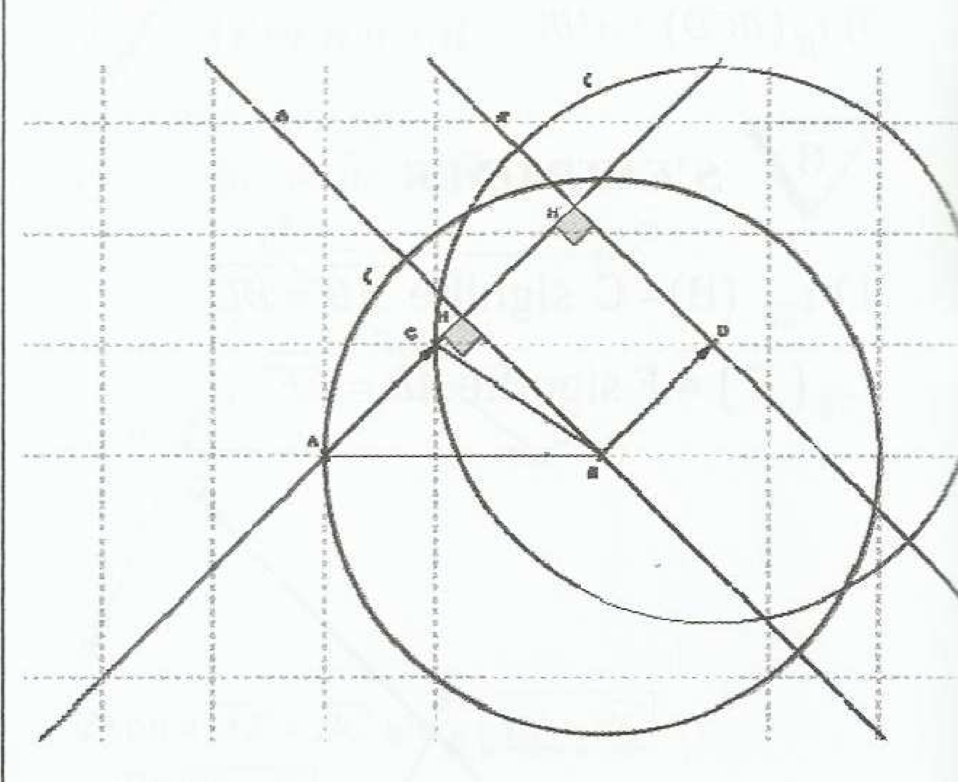
$\in\mathscr{C}'\cap[BD]$

$\in\{J\}$

Alors $t_{\overrightarrow{BA}}(I)=J$



12 S'ENTRAINER



1) $t_{\overrightarrow{AC}}(B)=D$ signifie $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

2) a) *On a :

$A\in\Delta$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(A)\in t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$ alors $C\in t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$

*On a : $\Delta\perp(AC)$ et $\Delta'\perp(AC)$ alors $\Delta//\Delta'$

Conclusion :

l'image de par Δ par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$ est la droite parallèle à Δ et passant par C alors $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)=\Delta'$

b) $H\in\Delta\cap(AC)$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(H)\in t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)\cap t_{\overrightarrow{AC}}((AC))$

$\in\Delta'\cap(AC)$

$\in\{H'\}$

D'où $t_{\overrightarrow{AC}}(H)=H'$

<u>2ème *méthode*</u> :

* $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)=\Delta'$ alors $\Delta//\Delta'$ alors (BH)//(DH')

* $t_{\overrightarrow{AC}}(B)=D$ alors $(AC)//(BD)$ alors (BD)//(HH')

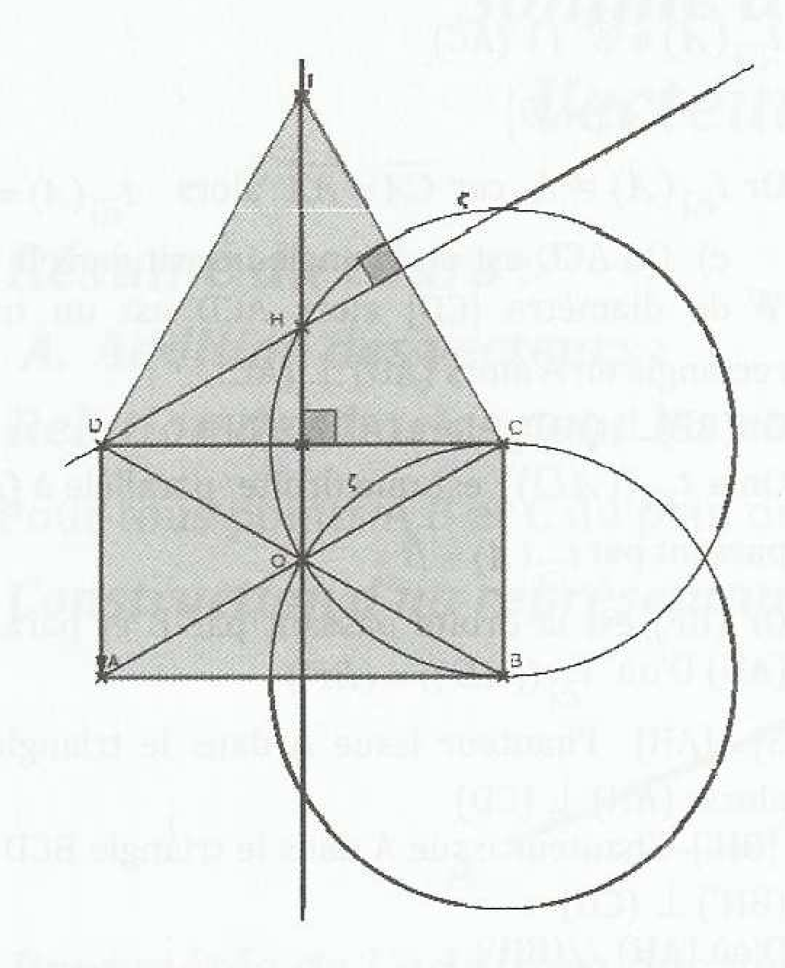
Alors BHH'D est un parallélogramme

alors $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{HH'}$ alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HH'}$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(H)=H'$

3) C de centre B et passant par A, alors son image C' par $t_{\overrightarrow{AC}}$ est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AC}}(B)=D$ et de même rayon.



13 SE PERFECTIONNER



1) • $t_{\overrightarrow{DA}}(D) = A$

• ABCD est un rectangle alors $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ alors $t_{\overrightarrow{DA}}(C) = B$

• On a (IH) ⊥ (DC) et (AD) ⊥ (DC) alors $(DA)//(IH)$ alors $t_{\overrightarrow{DA}}((IH)) = (IH)$

2) *Dans le triangle ABC, on a :

$\widehat{ACD} + \widehat{DAC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$ alors

$\widehat{ACD} + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Alors $\widehat{ACD} = 30^\circ$

D'où $\widehat{ACI} = \widehat{ACD} + \widehat{DCI} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

Alors $(AC) \perp (CI)$ or $(DH) \perp (IC)$ alors

$(AC)//(DH)$

* L'image de (DH) par $t_{\overrightarrow{DA}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{DA}}(D) = A$ et parallèle à (DH) alors

$t_{\overrightarrow{DA}}((DH)) = (DC)$

3) On a :

$H \in (IH) \cap (DH)$ alors $t_{\overrightarrow{DA}}(H) \in t_{\overrightarrow{DA}}((IH)) \cap t_{\overrightarrow{DA}}((DH))$

$\in (IH) \cap (AC)$

$\in \{O\}$

Alors $t_{\overrightarrow{DA}}(H) = O$

4) $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon CO alors $\mathscr{C}$ ' est de centre $t_{\overrightarrow{DA}}(C) = B$ et de même rayon

5) a) L'image de (OI) par $t_{\overrightarrow{OA}}$ est la droite passant par $t_{\overrightarrow{OA}}(O) = A$ et parallèle à (OI)

alors $t_{\overrightarrow{OA}}((OI)) = (AD)$

b) $\mathscr{C}$ " de rayon DI , $\mathscr{C}$ de rayon OC

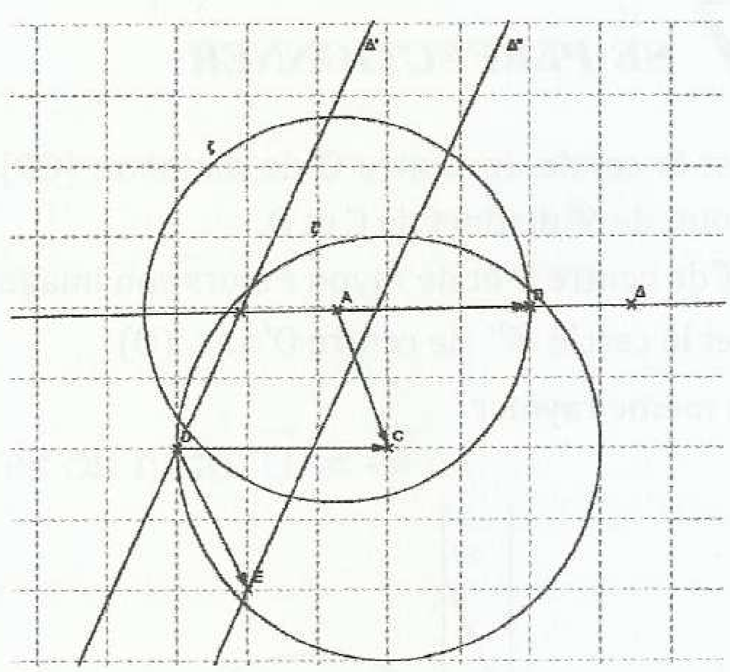
on a $OC \neq ID$ (car $OC \neq CD$ et $CD = ID$) alors $\mathscr{C}$" et $\mathscr{C}$ n'ont pas le même rayon alors il n'existe pas translation qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$ '

14 SE PERFECTIONNER

Dans la figure ci-dessous Δ et Δ ' sont deux droites sécantes.

A et B sont deux points distincts de Δ et D est un point de Δ '

C = $t_{\overrightarrow{AB}}$(D) et E = $t_{\overrightarrow{AC}}$(D)



A)

1) $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$ signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$t_{\overrightarrow{AC}}(D) = E$ signifie $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$

2) C est le milieu du segment [EB]

* on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

* on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$

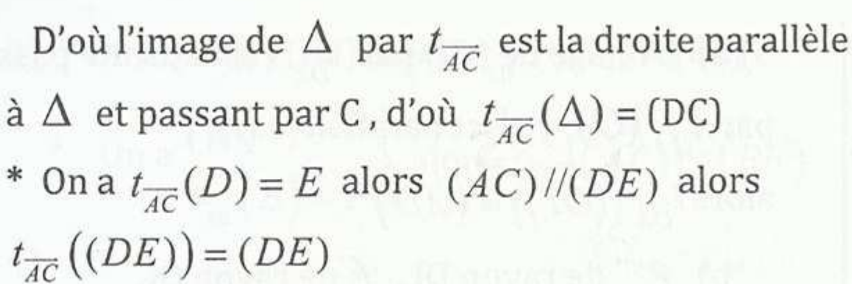
D'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$ d'où C est le milieu de [E B]

3) $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$? $t_{\overrightarrow{AC}}((DE))$?

* On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $(AB)//(DC)$ alors $\Delta//(DC)$

* On a : $A \in \Delta$ et $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$

D'où l'image de Δ par $t_{\overrightarrow{AC}}$ est la droite parallèle à Δ et passant par C , d'où $t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$ = (DC)



* On a $t_{\overrightarrow{AC}}(D) = E$ alors $(AC)//(DE)$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}((DE)) = (DE)$

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par B et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre C et passant par D

On a : AB = CD alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dont de même rayon or $t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$ et de même rayon que $\mathscr{C}$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$

B) On suppose que A et B son fixent et D est un point variable sur la droite Δ '

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$

On a : D varie sur Δ' alors $t_{\overrightarrow{AB}}(D)$ varie sur $t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta')$

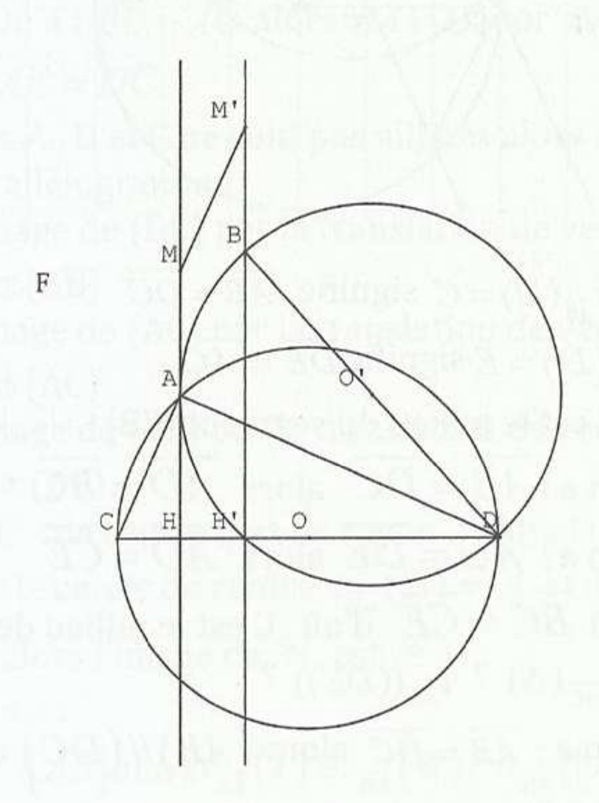
Alors C varie sur $\Delta'' = t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta')$



15 SE PERFECTIONNER

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O de diamètre [CD] et A un point de $\mathscr{C}$ distinct de C et D.

1) $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r alors son image par $t_{\overrightarrow{CA}}$ et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O'= $t_{\overrightarrow{CA}}$ (O) et de même rayon r



2) (AC) rencontre $\mathscr{C}'$ en B.

La droite Δ passant par B et perpendiculaire à (AC) rencontre $\mathscr{C}'$ en F.

a) $t_{\overrightarrow{CA}}((AC))$ =(AC) car (CA)//(AC)

b) on a A∈ $\mathscr{C} \cap$ (AC) alors $t_{\overrightarrow{CA}}(A) \in t_{\overrightarrow{CA}}(\mathscr{C})$ $\cap$ $t_{\overrightarrow{CA}}$ ((AC))

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) \in \mathscr{C}' \cap$ (AC)

$\in \{A, B\}$

Or $t_{\overrightarrow{CA}}(A) \neq$ A car $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{AA}$ alors $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

c) On ACD est un triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [CD] alors ACD est un triangle rectangle en A alors (AD) $\perp$ (AC)

Or (BF) $\perp$ (AC) alors (AD)//(BF)

On a $t_{\overrightarrow{CA}}((AD))$ est une droite parallèle à (AD) et passant par $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

Or (BF) est la droite passant par B et parallèle à (AD) D'où $t_{\overrightarrow{CA}}((AD)) = (BF)$

3) [AH] l'hauteur issue A dans le triangle ACD alors (AH) $\perp$ (CD)

[BH'] l'hauteur issue A dans le triangle BCD alors (BH') $\perp$ (CD)

D'où (AH) //(BH')

On a $t_{\overrightarrow{CA}}((AH))$ est une droite parallèle à (AH) et passant par $t_{\overrightarrow{CA}}(A) = B$

Or (BH') est la droite passant par B et parallèle à (AH)

D'où $t_{\overrightarrow{CA}}((AH)) = (BH')$

4) On a M varie sur la droite (AH) alors $t_{\overrightarrow{CA}}$ (M) varie son image par $t_{\overrightarrow{CA}}$ ((AH)) alors M' varie sur (BH')



16 SE PERFECTIONNER

A et B deux points distincts du plan

1) MA= MB signifie M appartient à la médiatrice de [AB] d'où l'ensemble E est la médiatrice de [AB]

2) AM =AB signifie M appartient au cercle de centre A et de rayon AB d'où l'ensemble E est le cercle de centre A et de rayon AB.

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ signifie M =B d'où l'ensemble E est le pont B

4) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$ impossible alors l'ensemble E est l'ensemble vide

5) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ signifie M est le milieu de [AB] alors l'ensemble E est le milieu de [AB].

6) AM+BM = AB signifie M appartient au segment [AB] alors l'ensemble E est le segment [AB].

Somme de deux vecteurs
Vecteurs Colinéaires

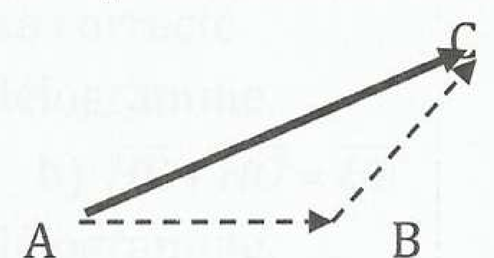
I) Résumé du cours :

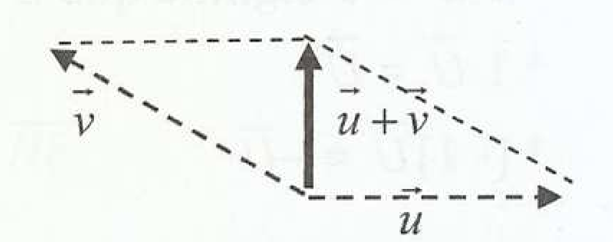
A. Addition des vecteurs :

↬ *Relation de Chasles pour les vecteurs:*

Pour tous points A,B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

↬ *Construction d'un représentant du vecteur $\vec{U} + \vec{V}$:*





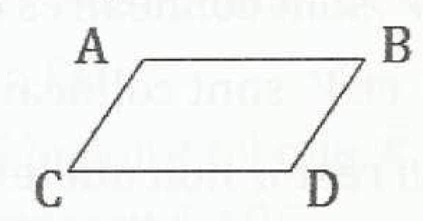
↬ *Propriétés de l'addition des vecteurs :*

* $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$
* $\left(\vec{U}+\vec{V}\right)+\vec{W}=\vec{U}+\left(\vec{V}+\vec{W}\right)$
* $\vec{U}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{U}=\vec{U}$
* Si $\vec{U}+\vec{V}=\vec{0}$ On dit que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont opposés on note $\vec{U}=-\vec{V}$ ($-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$)
* $\vec{U}-\vec{V}=\vec{U}+(-\vec{V})$

↬ *Caractérisation vectorielle d'un parallélogramme:*

A, B et C trois points non alignés :

* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme (attention à l'ordre des lettres)
* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ signifie ABDC est un parallélogramme.



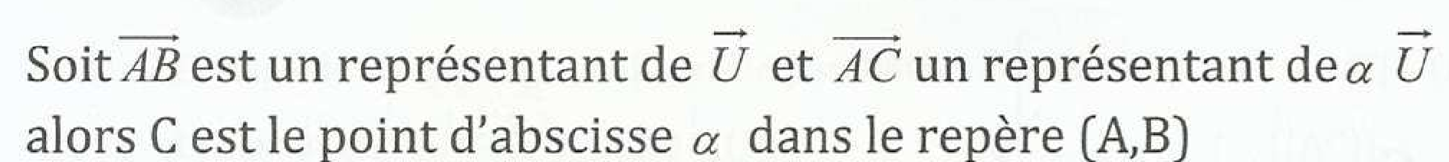
↬ *Multiplication d'un vecteur par un réel :*

- ***Définition*** : α un réel, $\vec{U}$ un vecteur. On désigne par $\alpha\,\vec{U}$ le vecteur défini ainsi :

1er cas :Si $\vec{U}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$ alors $\alpha.\vec{U}=\vec{0}$.

2ème cas :Si $\vec{U}\neq\vec{0}$ et $\alpha\neq0$,

Soit $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\alpha\,\vec{U}$ alors C est le point d'abscisse α dans le repère (A,B)



$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

- ***Propriétés :*** Soient α et β deux réels et $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs.

  *$\alpha(\vec{U} + \vec{V}) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}$

  *$(\alpha + \beta)\vec{U} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{U}$.

  *$(\alpha\beta)\vec{U} = \alpha(\beta\vec{U})$.

  *$\alpha\,\vec{U} = \vec{0}$ signifie que $\alpha = 0$ ou $\vec{U} = \vec{0}$.

  *$1\,\vec{U} = \vec{U}$

  *$(-1)\vec{U} = -\vec{U}$

↳ *Caractérisation vectorielle du milieu :*

I est le milieu de [AB] signifie $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ signifie $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ signifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

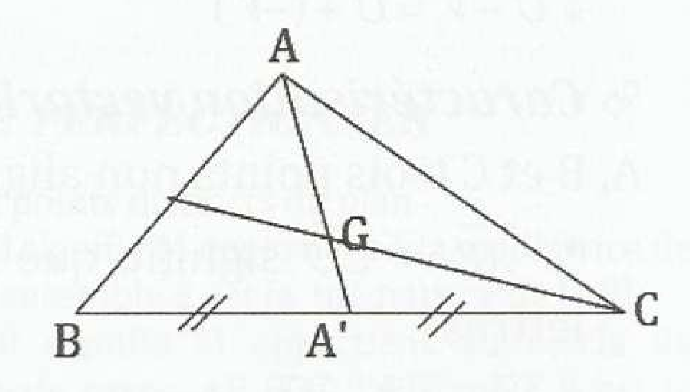
Remarque : Si I est le milieu de [BC] alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

↳ *Caractérisation vectorielle du centre de gravité :*

G est le centre de gravité du triangle ABC

signifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ([AA'] une médiane de ABC).

signifie ; $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$



signifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

↳ ***Vecteurs colinéaires :*** $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires dans deux cas :

- Si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ alors $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{U} \neq \vec{0}$ et $\vec{V} \neq \vec{0}$ il existe un réel α non nul tel que : $\vec{U} = \alpha\,\vec{V}$
- Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ alors *(AB)// (CD)

*AB = $|\alpha|$ CD

* Si $\alpha > 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens

* Si $\alpha < 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.

Remarques :

- Pour montrer que (AB) et (CD) sont parallèles il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Pour montrer que les points A,B et C sont alignés il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

II) Exercices :

1 Q-C-M

Déterminer la réponse correcte

1) EFGH est un parallélogramme.
   a) $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}$ b) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HF}$ c) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HF}$
2) EFGH est un parallélogramme.
   a) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ b) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{GF}$ c) $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$
3) Quelle est la seule égalité exacte quelles que soient les positions des points A,B et C?
   a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
4) B est le milieu de [AC]
   a) $\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2 VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

Soit ABC un triangle.

1) Si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ alors le milieu de [BC] est lui-même le milieu de [AD].
2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$
3) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$
4) Si $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
5) $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}$ et $a \in IR$ alors AB = a CD
6) ABC un triangle équilatéral et K le point tel que $\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CK}$
Alors K est le centre du cercle circonscrit à ABC
7) G est le centre de gravité de ABC alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$



VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant:

1) Soit un segment [AC] de milieu B et soit M un point variable tel que $\overrightarrow{AM}=(2x-1)\overrightarrow{AC}$

   a) M est le milieu de [AC] si x = 0

   b) $M\in[BC]$ si $x\in\left[\frac{3}{4},1\right]$

   c) $AM\leq 3AB$ si $x\leq 1$

2) ABCD un parallélogramme de centre O

   Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$



APPLIQUER

Soit un triangle ABC

1) Donner un représentant de vecteur somme dans chacun des cas suivants:

   a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$........ b) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=$........ c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$........

2) Ecrire chacun les vecteurs suivants sous la forme d'une somme:

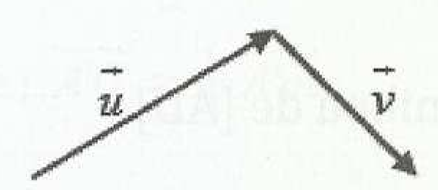
   a) $\overrightarrow{CA}=$.............. b) $\overrightarrow{BC}=$.............. c) $\overrightarrow{AB}=$..............



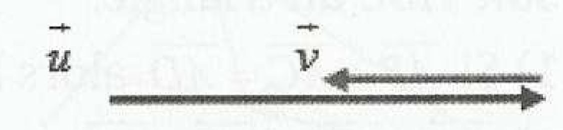
APPLIQUER

Représenter le vecteur somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

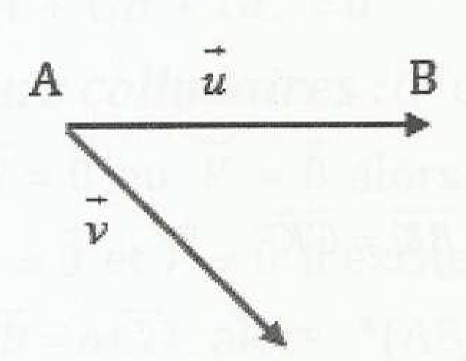
1)







2)





APPLIQUER

Soit ABCD un parallélogramme. Simplifier au maximum :



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$........ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$........ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=$........ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$........



APPLIQUER

Soit OAB un triangle

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$
2) Soit C le point tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Montrer que O est le milieu du segment [CD].



APPLIQUER

Soient A, B, C, D quatre points du plan.

1) Ecrire plus simplement les vecteurs suivants :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$ $\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

$\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}$ $\vec{t}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$

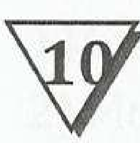
2) Montrer que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$



APPLIQUER

Soit ABC un triangle

1) Construire les points E et F vérifiant : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que B est le milieu de [EF]



APPLIQUER

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1) Simplifier les vecteurs :
   a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$
2) Démontrer que pour tout point M Du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

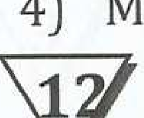


APPLIQUER

Soit ABC un triangle et O est le milieu de [BC]

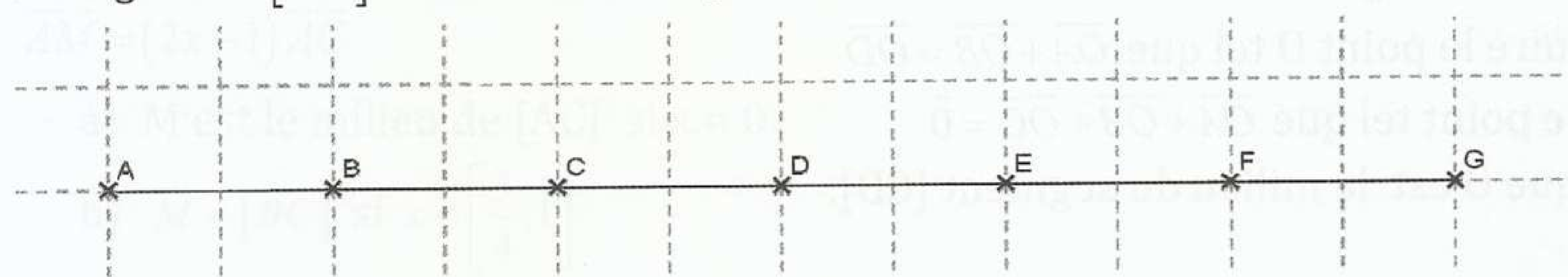
1) Construire les points D et E tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ et $t_{\overrightarrow{DA}}(E)=C$
2) Montrer que D est le milieu de [BE]
3) Simplifier au maximum :
   a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ED}$
   b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

4) Montrer que $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}$




12 APPLIQUER

Le segment $[AG]$ est divisé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes par :

1) La lettre qui convient :

(a) $\overrightarrow{E.....}=-2\overrightarrow{EF}$ (b) $\overrightarrow{C....}+\overrightarrow{....G}=\vec{0}$ (c) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A....}$

2) Le nombre qui convient :

(a) $\overrightarrow{CE}=......\overrightarrow{AG}$ (b) $\overrightarrow{AC}=..........\overrightarrow{GE}$ (c) $\overrightarrow{DE}=..........\overrightarrow{GE}$



13 APPLIQUER

Soit ABC un triangle.

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}$

$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}$



14 S'ENTRAINER

Soient A et B deux points tels que $AB=5cm$

Soit M le point défini par : $-5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.



15 S'ENTRAINER

Soit PQR un triangle de centre de gravité G. soient les points I, J et K tels que :

$\overrightarrow{GI}=-3\overrightarrow{GP},\ \overrightarrow{GJ}=-3\overrightarrow{GQ}$ et $\overrightarrow{GK}=-3\overrightarrow{GR}$

1) faire une figure

2) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.



S'ENTRAINER

ABC est un triangle avec $AB = 8cm$

1) placer le point E tel que : $3\overrightarrow{EA}+5\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ Justifier la position de E à l'aide d'un calcul vectoriel.
2) Démontrer que $3\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}=8\overrightarrow{CE}$



S'ENTRAINER

ABC est un triangle de centre de gravité G. le point Z est le milieu de $[AC]$.

1) Faire une figure puis placer les points I, J et K définis par $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$
2) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.
3) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BZ}$
4) Démontrer que BIJG est un parallélogramme.



S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle

1) Construire les points D et E tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{BC}$
2) Montrer que A, E et D sont alignés.
3) Montrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.



S'ENTRAINER

Soient A, B et D trois points non alignés

1) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
2) Soit O le centre du quadrilatère ABCD montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$
3) Soit T le point du plan vérifiant : $2\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$
   a) Exprimer $\overrightarrow{AT}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et construire le point T.
   b) Soit I le milieu de [BC],montrer que T est le milieu de [AI].



SE PERFECTIONNER

Soit un triangle ABC, I le milieu de [AC]

1) a) Construire les points D et K tel que $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$ et $K = t_{\overrightarrow{BC}}(A)$

b) Montrer que C est le milieu de [KD]

2) a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IC}$ (1)

3) a)Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$

b) Montrer que $\overrightarrow{IN} = 4\overrightarrow{IK}$ (2)

4) A partir de (1) et (2) montrer que (MN) // (KC)

5) Soit α un réel et T le point tel que $\overrightarrow{KT} = \alpha\overrightarrow{KC}$ Déterminer et représenter avec une autre couleur sur la figure l'ensemble des points K lorsque α varie dans $[-2,-1]$

Soit ABC un triangle et O le milieu du segment [AC] et I le milieu du segment [BC]

1) Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$

a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ et placer le point G.

b) Montrer alors que I, G et A sont alignés.

2) a) Construire les points D, E et F tel que :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que (EF) // (AD).

3) Soit M un point variable sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et passant par O et soit M' l'image de M par $t_{\overrightarrow{AC}}$

a) Quelle est la nature du quadrilatère BDM'M.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M varie.



22 SE PERFECTIONNER

Soit ABDC un parallélogramme

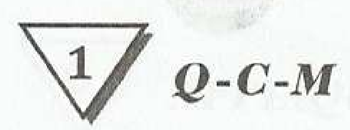
1) Soit G le point du plan tel que $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC et placer le point G.

2) Soient les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$

a) Construire les points M et N.

b) Montrer que (MN) //(AD).



1 Q-C-M

1) b) 2) c) 3) c) 4) c)



2 VRAI-FAUX

1) Vrai en effet :

ABC est un triangle et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ alors ABDC est un parallélogramme alors

Le milieu de [BC] est égal au milieu de [AD]

2) Vrai en effet :

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$

3) faux en effet :

$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq 2\overrightarrow{AC}$

4) Vrai en effet :

$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ *alors* $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

alors $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ *alors* $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

5) Faux en effet :

$\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}$ et $a\in IR$ alors on a AB = $|a|$ CD

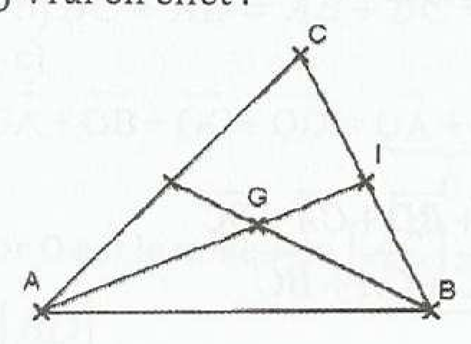
6) Vrai en effet :

On a : $\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CK}$ alors $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Alors K est le centre de gravité de ABC

Or ABC un triangle équilatéral alors K est le centre du cercle circonscrit à ABC

7) Vrai en effet :



Soit I le milieu de [BC]

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$

$=2\overrightarrow{AI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{AI}$

Or G est le centre de gravité de ABC et I =B*C alors

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ alors $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}=2\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$

3 VRAI-FAUX

1) $\overrightarrow{AM}=(2x-1)\overrightarrow{AC}$ et B=A*C

a) Faux en effet :

M est le milieu de [AC] signifie $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

signifie $2x-1=\frac{1}{2}$

signifie $2x=\frac{3}{2}$

signifie $\boxed{x=\frac{3}{4}}$

b) Vrai en effet :

$\overrightarrow{AM}=(2x-1)\overrightarrow{AC}$

signifie M d'abscisse $(2x-1)$ dans le repère (A,C) .

Or B est le milieu de $[\text{AC}]$ alors $x_B=\frac{1}{2}$.

D'où M$\in[BC]$ signifie $\frac{1}{2}\le x_B\le 1$ signifie

$\frac{1}{2}\le 2x-1\le 1$ signifie $\frac{3}{2}\le 2x\le 2$ signifie

$\frac{3}{4}\le x\le 1$

c) On a :

$\overrightarrow{AM}=(2x-1)\overrightarrow{AC}=(2x-1)(2\overrightarrow{AB})=(4x-2)\overrightarrow{AB}$

alors $AM=|4x-3|\,AB$

D'où $AM\le 3AB$ signifie $|4x-2|\,AB\le 3AB$

Signifie $|4x-2|\le 3$ Signifie $-3\le 4x-2\le 3$

Signifie $-1\le 4x\le 5$

Signifie $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}$

2) Vrai

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})$

$=4\overrightarrow{MO}+\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}_{\vec{o}}+\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}_{\vec{o}}$

car $O=A*C$ *et* $O=B*D$

$=4\overrightarrow{MO}$



APPLIQUER

1) a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$

2)a) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$

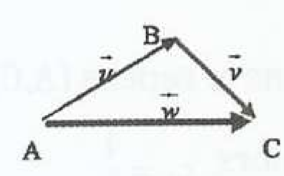
b) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

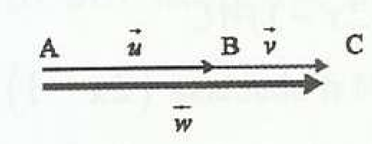
c) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

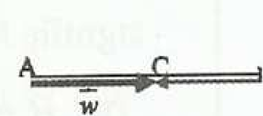


APPLIQUER

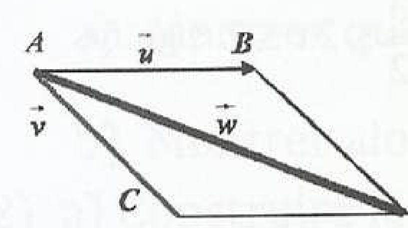
1°) $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$







2)

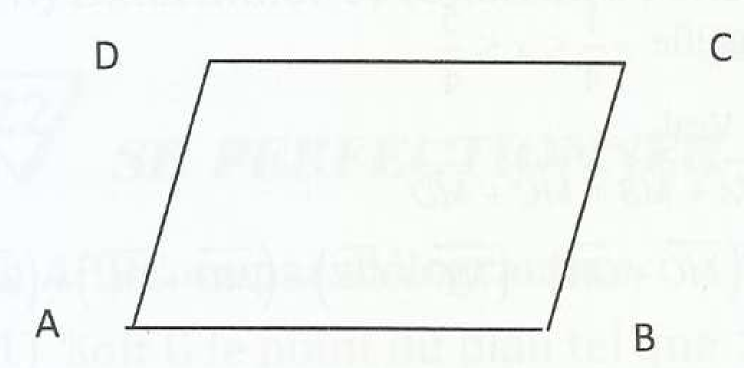


$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme

__Remarque :__ Pour construire un représentant de la somme de deux vecteurs on se ramène à l'une des situations ci-dessus.



APPLIQUER



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

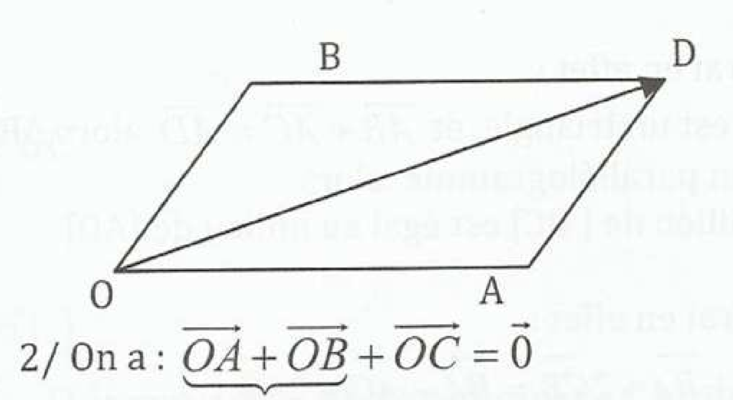
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$



APPLIQUER

1) O,A et B ne sont pas alignés et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$
Alors OADB est un parallélogramme



2/ On a : $\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Alors $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Alors O est le milieu de $[CD]$



APPLIQUER

1)

- $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$

- $\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$

- $\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}$

$=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}+\underbrace{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$

$=\vec{0}$

- $\vec{t}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$

$=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}+\underbrace{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{BC}$

2) Montrons que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$?

On a : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

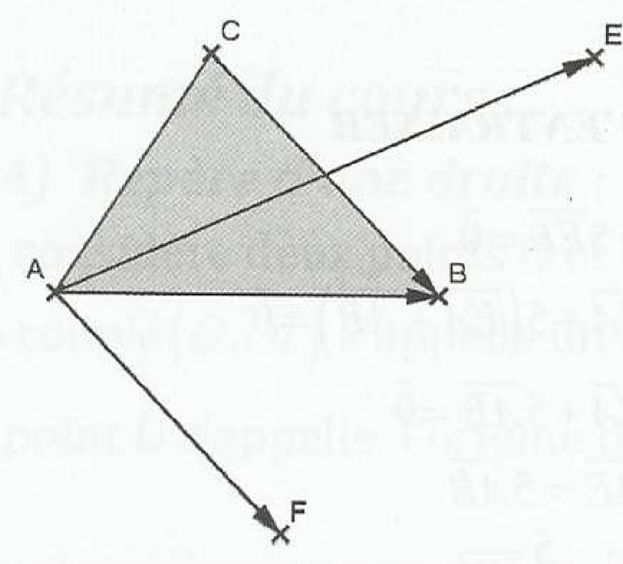


9 APPLIQUER

Soit ABC un triangle

1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$



2) Montrons que B est le milieu de [EF]

*On a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et A,B et C ne sont pas alignés

alors ABEC est un parallélogramme alors $\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}}$

* On a $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$ alors $\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FB}}$

D'où $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BE}$ B est le milieu de [EF]



10 APPLIQUER

1)a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

c)

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}_{\vec{0}}=\vec{0}$$

car O est le milieu de $[AC]$ et O est le milieu de $[BD]$

d) $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}+\underbrace{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

2)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$

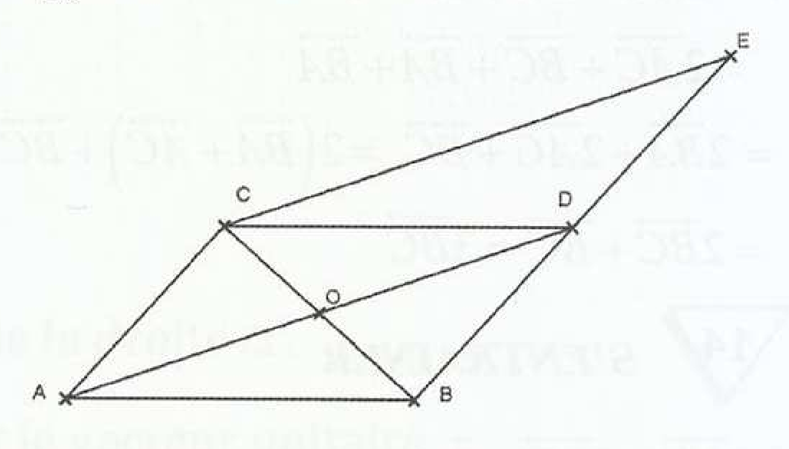
$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

11 APPLIQUER

1) • $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ signifie ABDC est un parallélogramme

• $t_{\overrightarrow{DA}}(E)=C$ signifie $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EC}$



2) On a ABDC est un parallélogramme alors $\boxed{\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}}$

On a : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EC}$ alors $\boxed{\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}}$

D'où $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BD}$ alors $D=B*E$

3) a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$

car ADEC est un parallélogramme

4) On a :

$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$

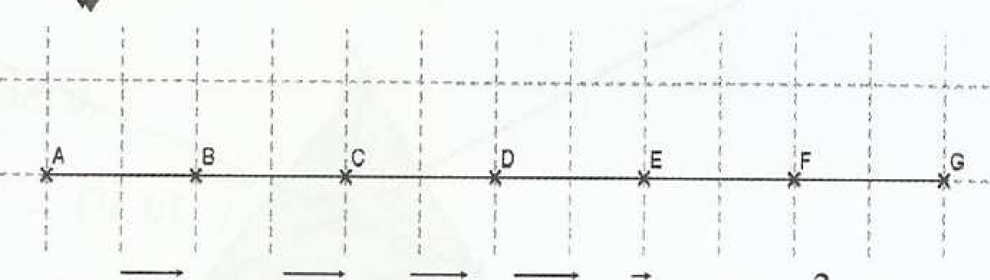
$=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}$

Multiplication d'un vecteur par un réel - vecteurs colinéaires



12 APPLIQUER



1)a) $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{EF}$ b) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EG}=\vec{0}$ c) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

2)a) $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ b) $\overrightarrow{AC}=(-1)\overrightarrow{GE}$

c) $\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GE}$



APPLIQUER

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \;\; = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \;\; = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \;\; = \overrightarrow{CB}$

$\vec{v} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}$

$= 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$

$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \;\; = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$



S'ENTRAINER

$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Alors $5\overrightarrow{AM} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

Alors $5\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Alors $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Alors $2\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$





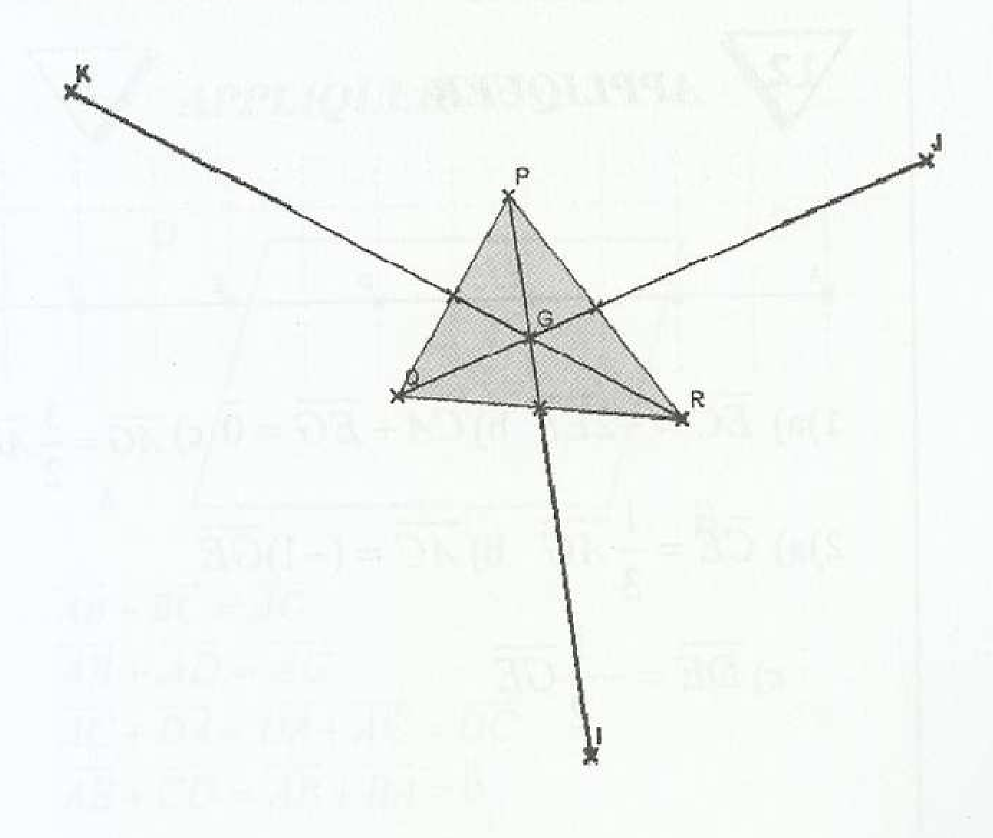


S'ENTRAINER

$\overrightarrow{GI} = -3\overrightarrow{GP}$

$\overrightarrow{GJ} = -3\overrightarrow{GQ}$

$\overrightarrow{GK} = -3\overrightarrow{GR}$



2) On a : $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \left(-3\overrightarrow{GP}\right) + \left(-3\overrightarrow{GQ}\right) + \left(-3\overrightarrow{GR}\right)$

$= (-3)\left(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}\right)$

$= (-3).\vec{0}$

car G est le centre de gravité de PQR.

$= \vec{0}$



S'ENTRAINER

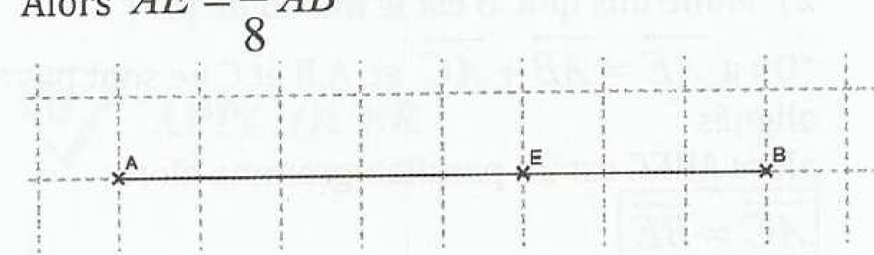
1) $3\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{EA} + 5\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

Alors $8\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Alors $8\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB}$

Alors $\overrightarrow{AE} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}$



2)

$3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB}$

$= 3\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}\right) + 5\left(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB}\right)$

$= 8\overrightarrow{CE} + \underbrace{3\overrightarrow{EA} + 5\overrightarrow{EB}} \;\; = 8\overrightarrow{CE}$

Activités dans un repère

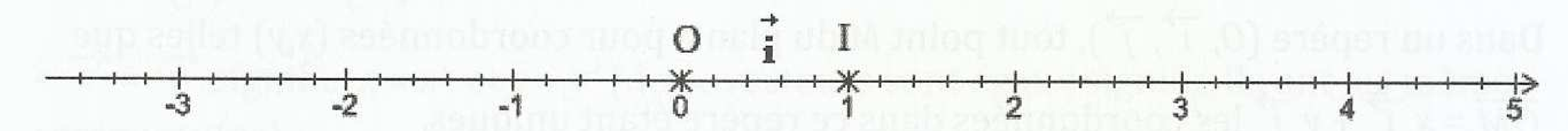
I) Résumé du cours :

A) Repère d'une droite :

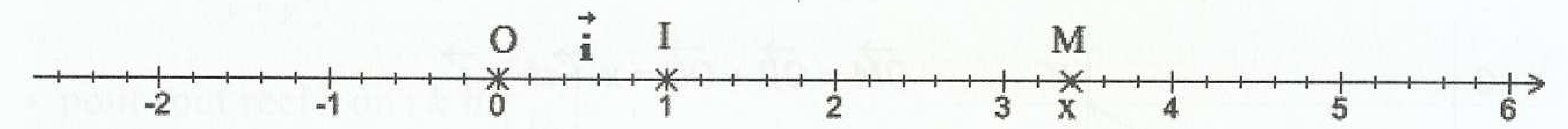
On considère deux points O et I de la droite Δ.

Le couple $(O;\overrightarrow{OI})$ s'appelle un repère cartésien de la droite Δ.

Le point O s'appelle l'origine du repère et $\overrightarrow{OI}$ est le vecteur unitaire



L'abscisse d'un point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI})$ est l'unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$



Soient A et B deux points de Δ d'abscisses respectives x_A et x_B .

On a $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI}$

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est* noté $\overline{AB}$, est elle définie par $\overline{AB} = x_B - x_A$

B) Repères du plan

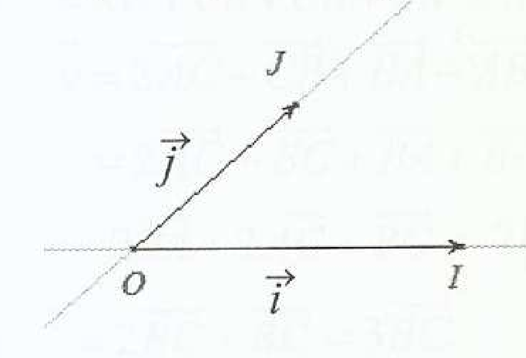
Choisir un repère cartésien dans le plan c'est :

- choisir un point *O*, appelé *origine du repère*,
- choisir deux vecteurs *non colinéaires* $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$,
- choisir *un ordre* entre $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

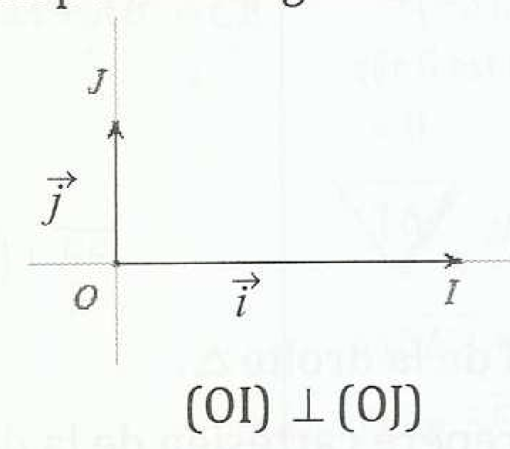
La droite (*OI*) munie du repère $(O, \vec{i})$ est *l'axe des abscisses* du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la droite (*OJ*) munie du repère $(O, \vec{j})$ est *l'axe des ordonnées*.

Trois cas se présentent :

Repère *quelconque*

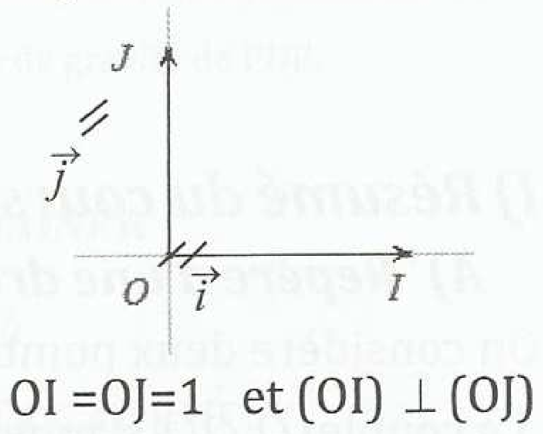


Repère *orthogonal*



(OI) ⊥ (OJ)

Repère *orthonormé*

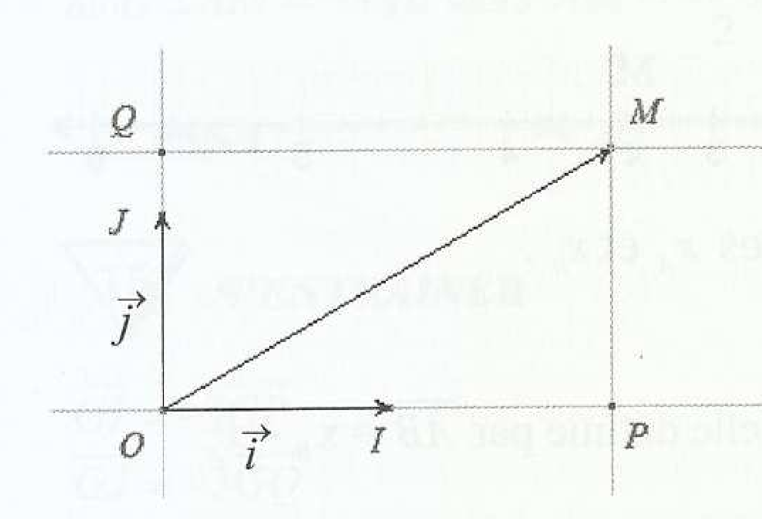


OI =OJ=1 et (OI) ⊥ (OJ)

1) Coordonnées d'un point dans un repère

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tout point M du plan a pour coordonnées (x,y) telles que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ les coordonnées dans ce repère étant uniques.

x est *l'abscisse* du pont M et y son *ordonnée*.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Remarque

Dans le plan, un point est repéré par deux coordonnées.

On dit que le plan est de dimension 2

2) Composantes d'un vecteur dans une base

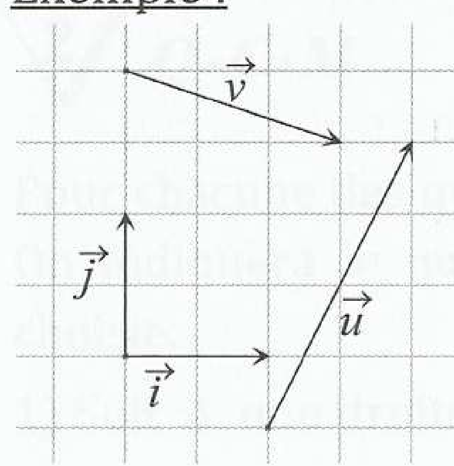
a) Définitions :

Soit $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et $\vec{u}$ un vecteur alors il existe uniquement deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On dit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les composantes de $\vec{u}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On dit aussi que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{u}$

Exemple :



$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ car $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ car $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

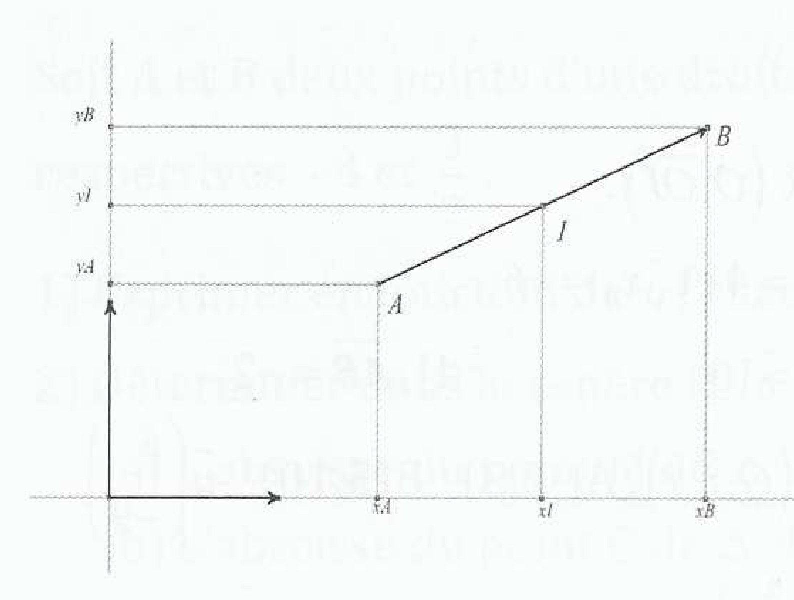
b) Propriétés : Soit $R(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs

- $\vec{u} = \vec{v}$ signifie $x = x'$ et $y = y'$ (deux vecteurs sont égaux signifie ils ont les mêmes composantes)
- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- pour tout réel k on : $k\,\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

3) <u>Composantes d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu d'un segment [AB]</u>

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points quelconques.



Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ on note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

4) <u>Vecteurs colinéaires</u>

<u>Propriété :</u> $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires signifie $xy' - x'y = 0$.

Exemples

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $2\times\left(-\frac{9}{2}\right) - (-3)\times 3 = -9 + 9 = 0$

Ou bien $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\frac{-3}{2} = \frac{-\frac{9}{2}}{3}$

* $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car $2\times 4 - 3\times 3 = -1 \neq 0$

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur

5) Distance de deux points

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

II)Exercices



1 Q-C-M

Indiquer la ou les bonnes réponses

I) Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien R $(O,\overrightarrow{OI})$.

Soient les points A et B d'abscisses respectives $x_A = 4$ et $x_B = -6$.

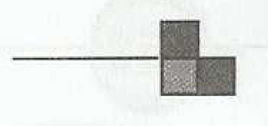
a) $\overline{AB} = 2$ b) $\overline{AB} = -10$ c) $\overline{AB} = 10$ d) $\overline{AB} = -2$

II) le plan est rapporté est rapporté à un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$, A(-2,3) B(5,10) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$

1) a) $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$

3) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires c) $\overrightarrow{AO}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires





2 Q-C-M

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. On indiquera le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien R $\left(O,\overrightarrow{OI}\right)$. Soient les points A et B d'abscisses respectives $x_A = 2$ et $x_B = 3$.

Soit E l'ensemble des points M de Δ tel que $2\overline{IM} - 4\overline{AM} \geq 0$

a) E $= [AB)$ b) E $= [BA)$ c) $E = [AB]$ d) E$= [OJ)$

2) Soit ABC un triangle et le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$ .On considère le repère cartésien $\left(A, 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ On a : a) D(2,-3) b) D(1, -3) c) D(1,3) d) D(2, 3)

3) Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère cartésien orthonormé A(2,-3) et B(5,2) on a :

a) AB > 8 b) 5 < AB < 8 c) AB < 5

4) Soit les points A(1,1),B(3,3) et C(6,7) sont alignés

a) A, B et C sont alignés.

b) A, B et C ne sont pas alignés.



3 APPLIQUER

Soit A et B deux points d'une droite Δ graduée à l'aide d'un repère $(O,\vec{u})$ d'abscisses respectives -4 et $\frac{3}{2}$.

1) Exprimer en fonction de $\vec{u}$, chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2) Déterminer dans le repère $(O,\vec{u})$

a) L'abscisse du point M de Δ définie par $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b) L'abscisse du point G de Δ définie par $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$



4 APPLIQUER

Soit $\Delta(O,\overrightarrow{OI})$

1) Placer les points A(3) ; B(- 5) , C(6) , D(9) et J = milieu de [BI]

2) Calculer $\overline{AB}, \overline{IC}$ *et* IB

3) Déterminer l'abscisse du point K milieu de [AC] et calculer IK.

4) Déterminer chacun des ensembles suivants :

a) $E_1 = \left\{ M(x) \in \Delta \text{ tel que } 2\overline{AM} - 3\overline{BM} \geq -21 \right\}$

b) $E_2 = \left\{ M(x) \in \Delta \text{ tel que } IM + IC = 5 \right\}$

c) $E_3 = \left\{ M(x) \in \Delta \text{ tel que } MA + MC = 3 \right\}$

5 S'ENTRAINER

Δ est une droite munie d'un repère cartésien $(O, \vec{i})$.

A, B et C sont les points de Δ d'abscisses respectives 2 ,-3 et 5.

1) Calculer $\overline{AB}, \overline{CA}$

2) Déterminer l'abscisse du point F milieu de [BC].

3) Exprimer $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{i}$.

4) Déterminer le point M de Δ tel que : $4\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC} = 0$

5) Déterminer l'ensemble E des points N de Δ tel que $2\overline{AN} - \overline{BN} < -5$



S'ENTRAINER

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

On considère les points A(-3,3) ; B(-1,1) et C(2,-4) et D(4,4)

1) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{BC}$

2) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ forme t-ils colinéaires ?

3) Déterminer les coordonnées du point E pour que ABED soit un parallélogramme.



S'ENTRAINER

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) Placer les points A(4,2) ; B(1,-1) et C(1,5) et déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$

2) La droite Δ passant par C et parallèle à (AB) coupe l'axe des abscisses en un point H. Déterminer les coordonnées de H.



S'ENTRAINER

Déterminer graphiquement les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$



S'ENTRAINER

On se place dans un repère orthonormé (O,I,J) où l'unité graphique est le centimètre.

1) Placer le point $A(-2;-1)$ puis le point B image du point A par la translation de vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$
2) Calculer les coordonnées du point B.
3) Placer le point C, symétrique du point B par la symétrie de centre A.
4) Calculer les coordonnées du point C.



10 S'ENTRAINER

Soit ABC un triangle quelconque. On place le point P symétrique de A par rapport à B, le point Q symétrique de B par rapport à C et le point R symétrique de C par rapport à A.

On appelle I le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[PQ]$.

On appelle G et H les centres de gravité des triangles ABC et PQR

On considère le repère $R\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

1) Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2) Déterminer les coordonnées du point I, puis celles du point G
3) Déterminer les coordonnées des points R, P, Q et K
4) Démontrer que les points G et H sont confondus.



11 SE PERFECTIONNER

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère R(A, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$)
2) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère R'(B, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$)
3) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère R''(C, $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}$)



12 SE PERFECTIONNER

Soit R $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien orthonormé du plan.

Soient les points : A(2,4), B(5,1) , C(0,2)

1) Placer les points A , B , C dans le repère R.
2) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
3) Déterminer une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ à 0.01 prés.
4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

   Déterminer le rayon et les coordonnées de W le centre de $\mathscr{C}$.
5) a) Construire le point D l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b) Déterminer les coordonnées de D
6) Soit le point T(1, x) (x étant un réel)
   a) Sur quelle ligne fixe varie le point T lorsque x varie.
   b) Déterminer le réel x pour que (AC) soit parallèle à (BT).
7) Montrer que l'aire du triangle OCT reste constant lorsque x varie.



SE PERFECTIONNER

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Placer les points $A\left(-2,\frac{5}{2}\right)$, $B\left(4,-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(3,-\frac{5}{2}\right)$.

2) Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

3) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$? au vecteur $\overrightarrow{BC}$?

4) Déterminer les coordonnées du point D pour que ACBD soit un parallélogramme.

5) Soit $E(1,y)$ où y est un nombre réel. Déterminer y pour que le point E appartienne à la droite (AC). Placer E dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

6) Le point C appartient-il au cercle de diamètre $[AB]$?



SE PERFECTIONNER

Soit ABDC un parallélogramme

1) Soit G le point du plan tel que $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC et placer le point G.

2) Soient les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}$
Soit le repère Soit le repère $R\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

a) Déterminer les coordonnées des points A,D, M et N.

b) En déduire que (MN) //(AD).



SE PERFECTIONNER

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan A(2,1) B(5,4) et C(-1 ,2)

1) Déterminer les coordonnés du point D pour que ABDC soit un parallélogramme.

2) Soit le point M(0,x) . Déterminer x pour que la droite (AB) soit parallèle à (CM).



SE PERFECTIONNER

Le plan est menu d'un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Placer les points A(1,1), B(3,3) et C(- 1 , 3)
2) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
3) Soit E l'image de C par le quart de tour direct de centre A.
   a) Construire E
   b) Montrer que A est le milieu de [BE]
   c) Déterminer les coordonnées de E.



SE PERFECTIONNER

Dans un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(6,8), B(2,0)$ et $D(-2,4)$

1) Calculer les coordonnées du point C tel que : $C = t_{\overrightarrow{AB}}(D)$
2) a) Montrer que le triangle ABD est isocèle
   b) En déduire que $(AC) \perp (BD)$
3) Soit M (m,2)
   a) Déterminer les composantes des chacun des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   b) Déterminer alors le réel m pour que A, D et M soit alignés.
4) Soit I le milieu de [BD] et G le centre de gravité du triangle ABD

Déterminer les coordonnées de I, G dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$



SE PERFECTIONNER

ABCD est carré de coté 4. I est le milieu du segment $[AB]$ (voir figure)

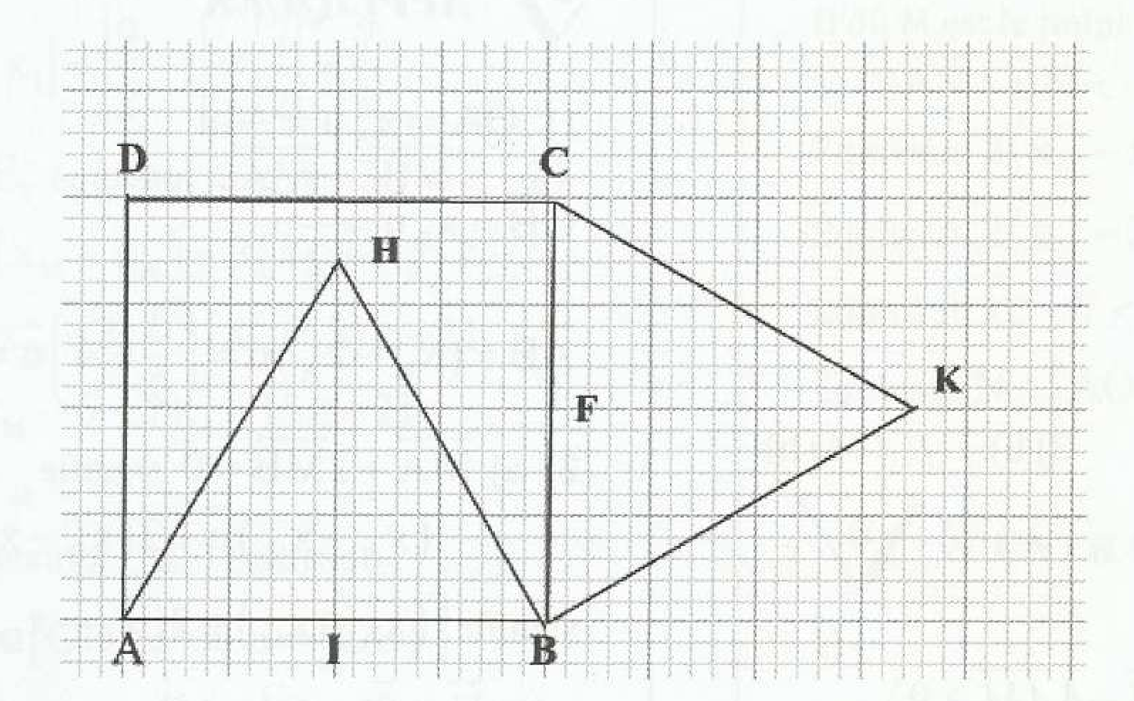
Soit E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

1) Prouver que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et en déduire que les points A, C et E sont alignés.
2) Soit F le milieu du segment [BC] et le repère $R = \left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$
   a) Prouver que R est un repère orthonormé.
   b) Démontrer que les droites (DI) et (AF) sont perpendiculaires.

3) ABH et BKC sont des triangles équilatéraux

a) Calculer IH

b) Déterminer les coordonnées des points H et K et en déduire que D, H et K sont alignés.





1 Q-C-M

I. c)

II. 1) a) b) c)

2) b)

3) c)

2 Q-C-M

1)b) / 2) c) / 3) b) / 4) b)

5)

En effet :

1) On a :

$M \in \Delta$ équivaut $2\overline{IM} - 4\overline{AM} \geq 0$

2)

équivaut $2(x_M - x_I) - 4(x_M - x_A) \geq 0$

équivaut $2(x_M - 1) - 4(x_M - 2) \geq 0$ équivaut

$-2x_M + 6 \geq 0$

équivaut $-2x_M \geq -6$ équivaut $x_M \leq 3$ équivaut

$M \in [BA)$

D'où l'ensemble E est $[BA)$

2)On considère le repère cartésien

$(A, 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$ alors

On a $\overrightarrow{AD} = 1 \times (2\overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{AC})$ alors D(1,3)

3) A(2,-3) et B(5,2) on a :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(5-2)^2 + (2+3)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

Alors : 5 < AB < 8

4) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

On a $\frac{5}{2} \neq \frac{6}{2}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors A,B et C ne sont pas alignés.

3 APPLIQUER

1) $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{u} = -4\vec{u}$

$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{u} = \frac{3}{2}\vec{u}$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{u} = \left(\frac{3}{2} + 4\right)\vec{u} = \frac{11}{2}\vec{u}$

2) a) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ signifie

$(x_A - x_M)\vec{u} + 2(x_B - x_M)\vec{u} = \vec{0}$

signifie $\left[(x_A - x_M) + 2(x_B - x_M)\right]\vec{u} = 0$

Or $\vec{U} \neq \vec{0}$ alors

$(x_A - x_M) + 2(x_B - x_M) = 0$ alors

$-4 - x_M + 2\left(\frac{3}{2} - x_M\right) = 0$

alors $-4 - x_A + 3 - x_M = 0$ alors $x_M = -\frac{1}{3}$

b) $2\overline{GA} - \overline{GB} = \overline{AB}$

$2(x_A - x_G)\vec{u} - (x_B - x_G)\vec{u} = (x_B - x_A)\vec{u}$

$\left[2(-4 - x_G) - \left(\frac{3}{2} - x_G\right)\right]\vec{u} = \left(\frac{3}{2} + 4\right)\vec{u}$

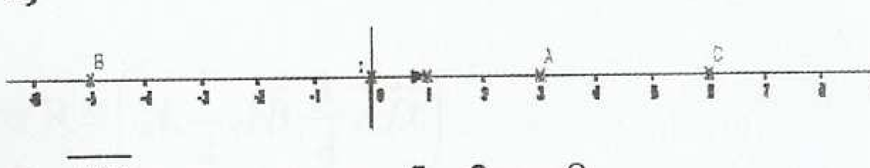
alors $-8 - 2x_G - \frac{3}{2} + x_G = \frac{11}{2}$

alors $-x_G = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} + 8$

alors $x_G = -15$

4 APPLIQUER

1)



2) $\overline{AB} = x_B - x_A = -5 - 3 = -8$

$\overline{IC} = x_C - x_I = 6 - 1 = 5$

$IB = |x_B - x_I| = |-5-1| = |-6| = 6$

3) $K = A * C$ alors $x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}$

$IK = |x_K - x_I| = \left|\frac{9}{2} - 1\right| = \left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$

4) a) $M \in E_1$ équivaut $2\overline{AM} - 3\overline{BM} \geq -21$

Équivaut $2(x_M - x_A) - 2(x_M - x_B) \geq -21$

équivaut $2(x_M - 3) - 3(x_M + 5) \geq -21$

équivaut $2x_M - 6 - 3x_M - 15 \geq -21$

équivaut $-x_M \geq 0$

$M \in E$ équivaut $x_M \leq 0$ équivaut

$M \in [OB)$ d'où $E = [OB)$

b) $M \in E_1$ équivaut $IM + IC = 5$

équivaut $IM + 5 = 5$

équivaut $IM = 0$

équivaut $M = I$ d'où $E_1 = \{I\}$

c) $M \in E_3$ équivaut $MA + MC = 3$

équivaut $MA + MC = AC$

équivaut $M \in [AC]$ d'où $E_3 = [AC]$

5 S'ENTRAINER

1) $\overline{AB} = x_B - x_A = -3 - 2 = -5$

$\overline{CA} = x_A - x_C = 2 - 5 = -3$

2)

F est le milieu de $[BC]$ alors

$x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

3) $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} = 2\vec{i}$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} = 3\vec{i}$

4) $4\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC} = 0$

équivaut

$4(x_A - x_B) - 3(x_B - x_M) + (x_C - x_M) = 0$

Équivaut

$4(2 - x_B) - 3(-3 - x_M) + (5 - x_M) = 0$

Équivaut $8 - 4x_M + 9 + 3x_M + 5 - x_M = 0$

Équivaut $-2x_M + 22 = 0$ Equivalent $x_M = 11$

D'où M est le point de Δ d'abscisse 11

5) $2\overline{AN} - \overline{BN} < -5$

Équivaut $2(x_N - x_A) - (x_N - x_B) < -5$

Équivaut $2(x_N - 2) - (x_N + 3) < -5$

Équivaut $x_N - 7 < -5$ Équivaut $x_N < 2$

Équivaut $N \in [AO)$ privée de A

6 S'ENTRAINER

1)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-3) \\ 1-3 \end{pmatrix}$

alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 4-1 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ on a $\frac{5}{2} \neq \frac{3}{-2}$ alors

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires alors A,B et D ne sont pas alignés.

3) Pour que ABED sont un parallélogramme il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

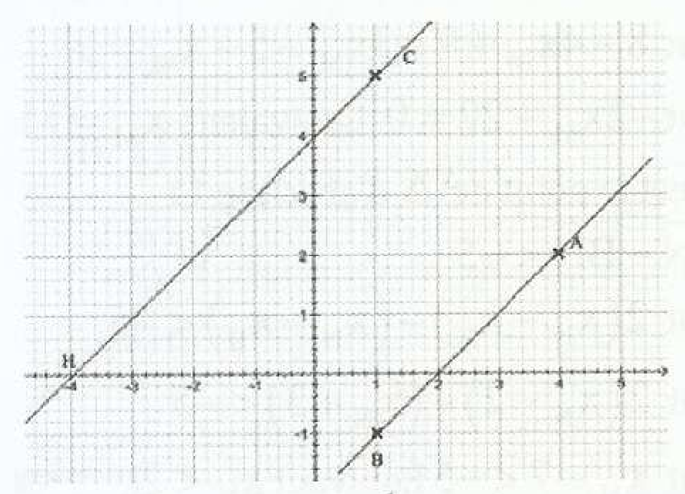
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - 4 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$ d'où

$x_E - 4 = 2$ et $y_E - 4 = -2$

Alors $x_E = 6$ et $y_E = 2$ d'où $E(6,2)$



S'ENTRAINER



$A(4,2),\ B(1,-1),\ C(1,5)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

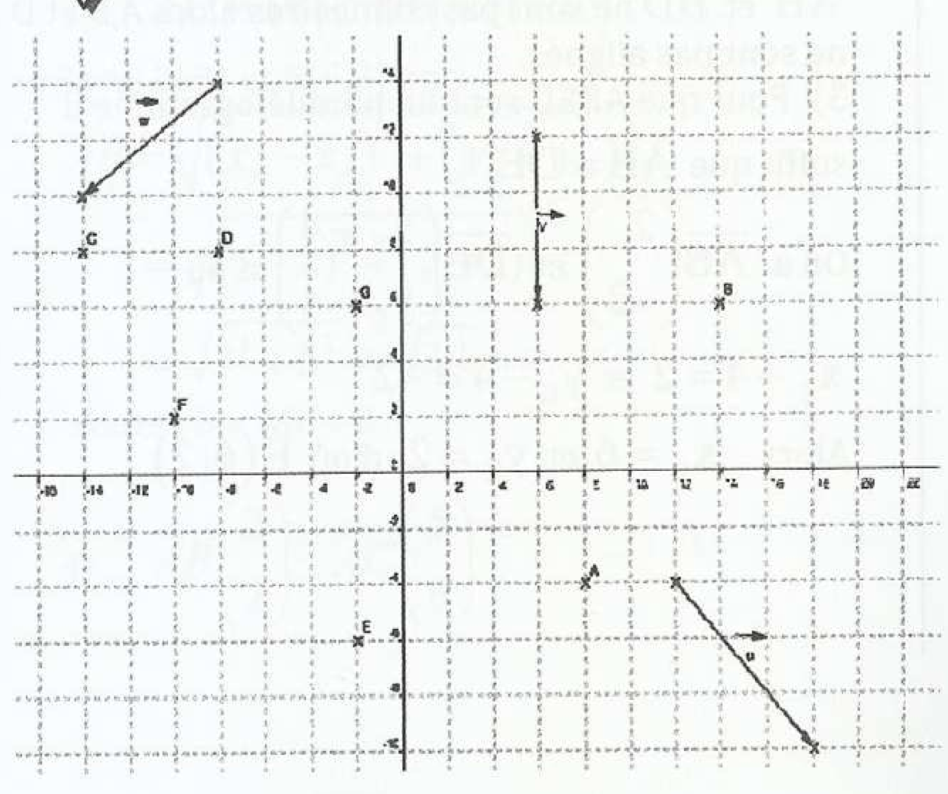
2) On a $H \in (O,\vec{i})$ alors $H(x_H,0)$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} x_H - 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

On a $(AB)//(CH)$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont linéaires alors $\dfrac{x_H - 1}{-3} = \dfrac{-5}{-3}$ alors $x_H - 1 = -5$ alors $x_H = -4$ d'ou $H(-4,0)$



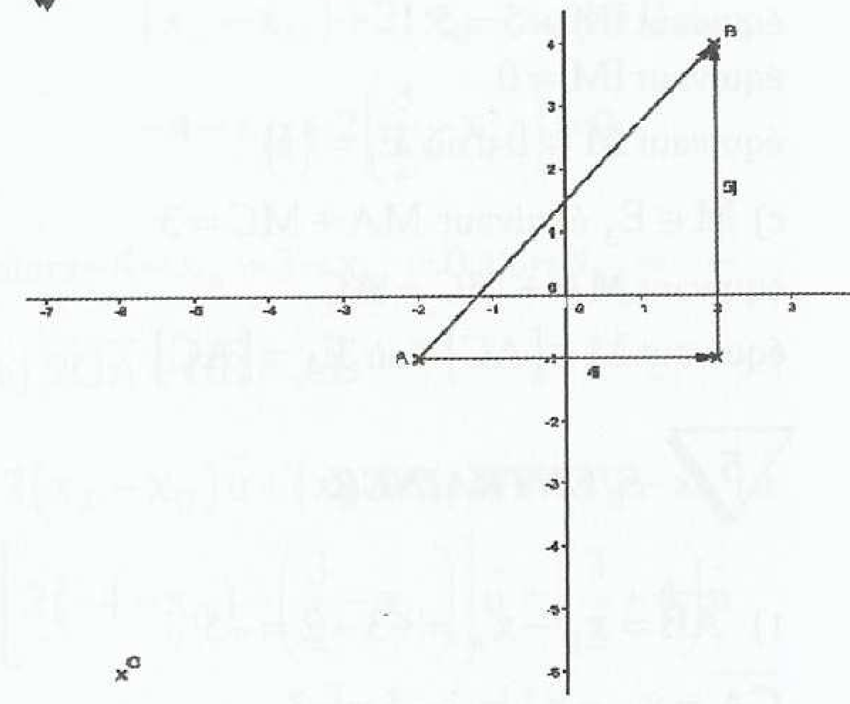
S'ENTRAINER



- $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 10\vec{j}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{CD} = 6\vec{i} + 0\vec{j}$ alors $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{EF} = (-8)\vec{i} + 8\vec{j}$ alors $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$
- on a $\vec{U} = 6\ \vec{i} + (-6)\ \vec{j}$ alors $\vec{U}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$
- on a $\vec{V} = 0\ \vec{i} + (-6)\ \vec{j}$ alors $\vec{V}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
- on a $\vec{W} = (-6)\vec{i} + (-4)\vec{j} =$ alors $\vec{W}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$



S'ENTRAINER



1) On a $\vec{U}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ signifie $\vec{U} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

$t_{\vec{U}}(A) = B$ signifie $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ signifie $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$

2) $\vec{U}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B + 2 \\ y_B + 1 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ d'où $x_B + 2 = 4$ et $y_B + 1 = 5$

d'où $x_B = 2$ et $y_B = 4$

d'où $B(2,4)$

3) On a $A = B*C$ alors

$$x_A = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ et } y_A = \frac{y_B + y_C}{2}$$

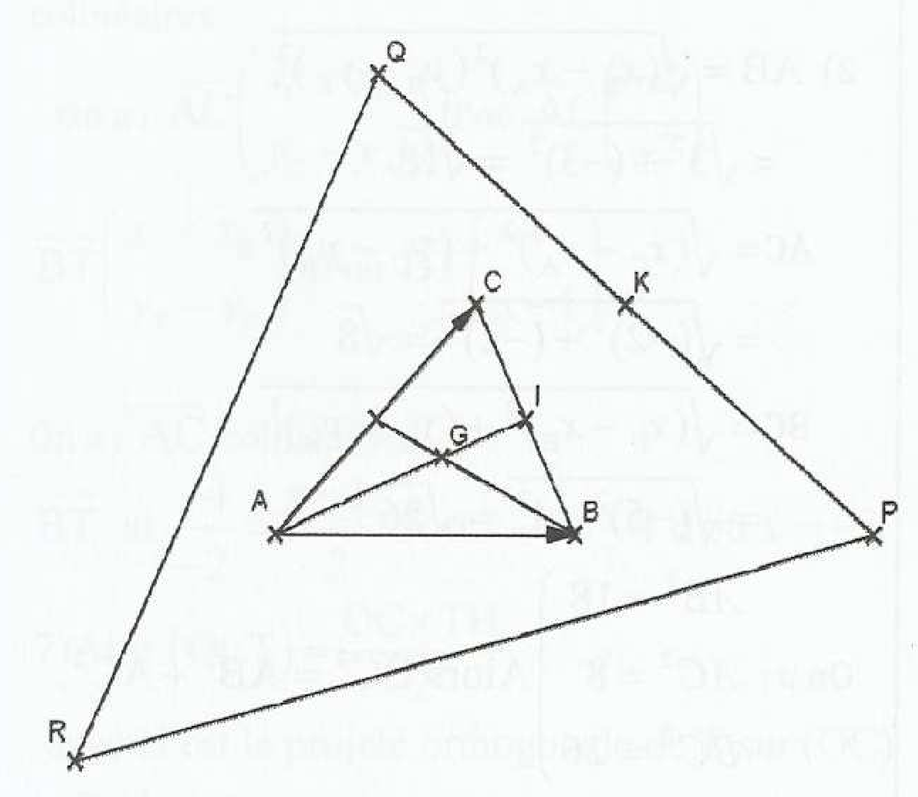
Alors $x_C = 2x_A - x_B$ et $y_C = 2y_A - y_B$

Alors $x_C = -6$ et $y_C = -6$ d'où

$C(-6,-6)$



10 S'ENTRAINER



1) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$

2) on a :

$$I = B \times C \text{ alors } x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_B + y_C}{2}$$

d'où $x_I = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{1}{2}$

d'où $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- On a G le centre de gravité de ABC et $I = B*C$

alors $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

On a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Alors $x_G = \frac{1}{3}$ et $y_G = \frac{1}{3}$ d'où $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2ème méthode :

On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

d'où $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3) • $R(0,-1)$ et $P(2,0)$

- On a $C = B*Q$ alors $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BC}$

or $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix} x_Q - 0 \\ y_Q - 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors

$x_Q = -1$ et $y_Q = 2 \Rightarrow Q(-1,2)$

- On a $K = P*Q$ alors

$$x_K = \frac{x_P + x_Q}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

alors $x_K = \frac{1}{2}$ et $y_K = 1 \Rightarrow K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

4) On a $K = P*Q$ et H est le centre de gravité du triangle PGR alors $\overrightarrow{RH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{RH}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H + 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, alors $\frac{2}{3}\overrightarrow{RK}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ alors

$x_H = \frac{1}{3}$ et $y_H + 1 = \frac{4}{3}$

et $y_H = \frac{1}{3}$

D'où $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ d'où

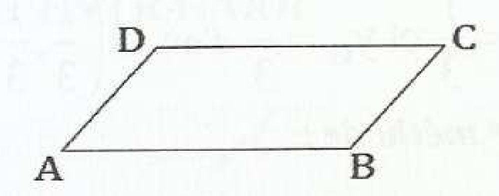
Conclusion : $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

alors $H = G$



11 SE PERFECTIONNER

ABCD un parallélogramme.



1) Dans le repère R(A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$)

A(0,0) B(1,0) , C(1,1) et D(0,1)

2) Dans le repère R'(B, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$)

* $\overrightarrow{BA} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{AC}$?

On a $\overrightarrow{BA} = (-1)\overrightarrow{AB} + 0\ \overrightarrow{AC}$ alors A(-1,0)

* B(0,0)

* $\overrightarrow{BC} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{AC}$?

On $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (-1)\overrightarrow{AB} + 1\ \overrightarrow{AC}$ alors C(- 1 , 1)

* $\overrightarrow{BD} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{AC}$?

On a :

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

$= 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= (-2)\overrightarrow{AB} + 1\ \overrightarrow{AC}$

Alors D(- 2 ,1)

3) Dans le repère R''(C, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$)

* $\overrightarrow{CA} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{CA}$?

On a : $\overrightarrow{CA} = 0\ \overrightarrow{AB} + 1\ \overrightarrow{CA}$ alors A(0,1)

* $\overrightarrow{CB} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{CA}$?

On a : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{CA}$ alors B(1,1)

* C(0,0)

* $\overrightarrow{CD} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{CA}$?

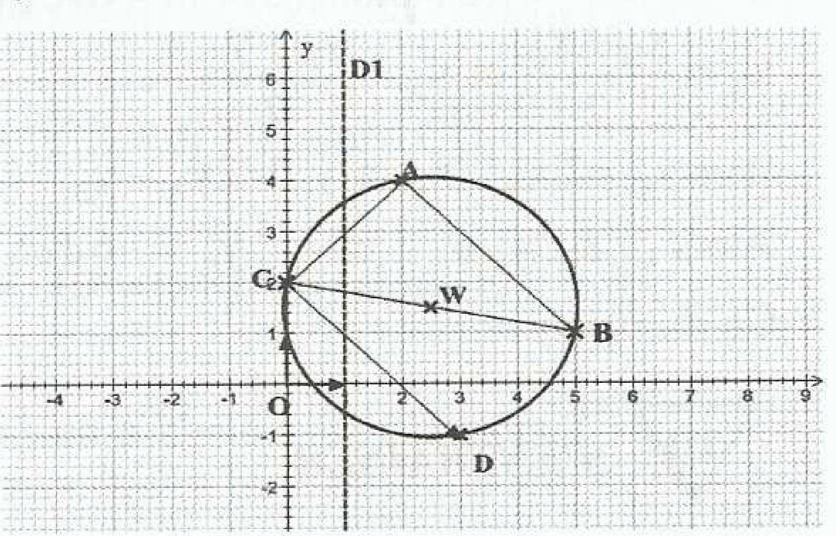
On a : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (-1)\overrightarrow{AB} + 0\ \overrightarrow{CA}$ alors D(- 1,0)

Activités dans un repère orthonormé



SE PERFECTIONNER

1)



2) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

On a : $\left.\begin{array}{l} AB^2 = 18 \\ AC^2 = 8 \\ BC^2 = 26 \end{array}\right)$ Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après le réciproque de théorème de Pythagore, on a : ABC est un triangle rectangle en A

3) On a : $tg(\hat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

une valeur approché de $\hat{ABC}$ à 0,01 près est 33.69°

4) * ABC est un triangle rectangle en A, alors $W = B * C$.

D'ou $x_w = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5}{2}$ et $y_w = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3}{2}$

D'où W ($\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$)

* $r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

5) a) On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

b) * On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ d'ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

* On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ d'ou $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 0 \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$

D'où $x_D = 3$ et $y_D - 2 = -3 \Leftrightarrow y_D = -1$.

Conclusion : D $(3, -1)$

6) T(1,x)

a) Lorsque x varie l'abscisse de T est 1 d'où le point T varie sur la droite D_1 passant par I(1,0) et parallèle à l'axe des ordonnées

b) On a : (AC) // (BT) si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BT}$ sont colinéaires

On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ D'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix} x_T - x_B \\ y_T - y_B \end{pmatrix}$ D'où $\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix} -4 \\ x-1 \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{AC}$ colinéaire à

$\overrightarrow{BT}$ si $\frac{-4}{-2} = \frac{x-1}{-2}$ d'ou $x - 1 = -4$ d'ou $x = -3$

7) Aire $(OCT) = \frac{OC \times TH}{2}$

avec H est le projeté orthogonale de T sur (OC)

$= \frac{2 \times 1}{2} = 1$

(car TH =1 lorsque T varie)

D'où l'aire du triangle OCT reste constant lorsque x varie

13 SE PERFECTIONNER

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)

2) $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-2)+4}{2} = 1$

$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1$

D'où $I(1,1)$

3) * $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a : $\frac{6}{2} \neq -\frac{3}{4}$

alors $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaire

* on a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ on a $\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}$

alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$

4) ACBD est un parallélogramme signifie $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alors $x_D + 2 = 1$ et $y_D - \frac{5}{2} = 2$

Alors $x_D = -1$ et $y_D = 4,5$ alors

$D(-1\ ;\ 4,5)$

5) Soit $E(1, y)$ $E \in (AC)$ signifie $\overrightarrow{AE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 3 \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ signifie

$\frac{y - \frac{5}{2}}{-5} = \frac{3}{5}$ signifie $y - \frac{5}{2} = -3$ signifie $y = -\frac{1}{2}$

Conclusion : $E\left(1\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$

6) On a

$IC = \sqrt{(x_c - x_I)^2 + (y_c - y_I)^2}$

$= \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

$IB = \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \neq IC$

On a IB est le rayon du cercle C de diamètre $[AB]$ et $IC \neq IB$ alors C$\notin$ C



SE PERFECTIONNER

ABDC un parallélogramme

1) Soit G le point du plan tel que

$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

alors $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Alors

$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Alors G est le centre de gravité du triangle ABC

2) Soient les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}$

a) Pour montrer que (MN) //(AD) il suffit de montrer que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires

On a : $A(0;0)$

* On a ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD}=1\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ alors D(1,1)

* $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$ alors $M(2;4)$

* $\overrightarrow{AN}=0\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ alors $N(0;2)$

b) On a: $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{NM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ alors $(MN)//(AD)$



SE PERFECTIONNER

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan A(2,1) B(5,4) et C(-1 ,2)

1) ABDC est un parallélogramme signifie $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D+1\\y_D-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Alors $x_D+1=3$ et $y_D-2=3$

Alors $x_D=2$ et $y_D=5$

D'où $D(2;5)$

2) M (0, x) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}1\\x-2\end{pmatrix}$

On a $(AB)//(CM)$ signifie $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CM}$ $\frac{x-2}{3}-\frac{1}{3}$ signifie $x=3$.

D'où $M(0;3)$



SE PERFECTIONNER

Le plan est menu d'un repère orthonormé R $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Placer les points A(1,1) ,B(3,3) et C(- 1 , 3)

2) $AB=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

$AC=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$

$BC=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}$

On a : $AB^2+AC^2=8+8=16=BC^2$ alors d'après la réciproque de Théorème de Pythagore, on a ABC un triangle rectangle en A

Or $AB=AC$ alors ABC est aussi isocèle en A.

3) Soit E l'image de C par le quart de tour direct de centre A.

a) $r(C)=E$ alors $AC=AE$ et $\widehat{CAE}=90°$

b) On a d'après 2) $AB=AC$ et $\widehat{BAC}=90°$

on a : $\left.\begin{matrix}AB=AC\\AC=AE\end{matrix}\right\}$ alors $\boxed{AC=AE}$

on a : $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=90°+90°=180°$

alors $A\in[BE]$

alors $A=B*E$

c) On a : $A=B*E$

alors $x_A=\frac{x_B+x_E}{2}$ et $y_A=\frac{y_B+y_E}{2}$

Alors

$x_E=2x_A-x_B=2-3=-1$

Alors

$y_E=2y_A-y_B=2-3=-1$

Alors $E(-1,-1)$



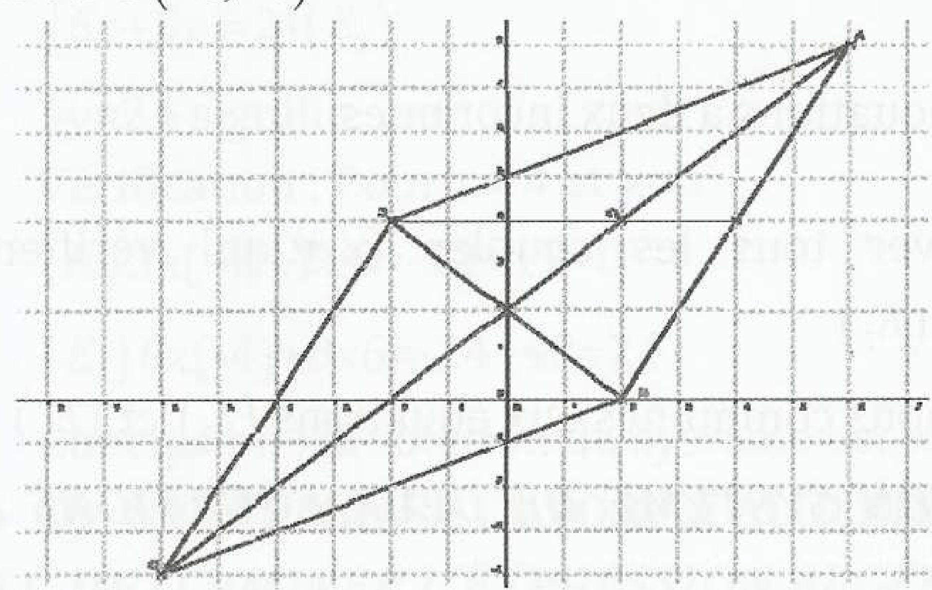
SE PERFECTIONNER

1) $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$ signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C+2\\y_C-4\end{pmatrix}$ alors

$x_C + 2 = -4$ et $y_C - 4 = -8$ alors $x_C = -6$ et $y_C = -4$

D'où $C(-6,-4)$



2)a) On a :

$$DA = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$$
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$$

Alors $DA = AB$ alors ABD est isocèle en A

b) On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et A,B et D ne sont pas alignés alors ABCD est un parallélogramme or $AB = AD$ alors ABCD est un losange alors $(AC)\perp(BD)$

3) a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}m-6\\-6\end{pmatrix}$

b) A, D et M sont alignés signifie

$\dfrac{m-6}{-8} = \dfrac{-6}{-4}$ signifie $\dfrac{m-6}{-8} = \dfrac{3}{2}$ signifie

$2(m-6) = 3(-8)$

signifie $2m - 12 = -24$

signifie $2m = -12$

signifie $m = -6$

4) * On a : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car $I = A * C$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Alors $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

* G est le centre de gravité de ABD

Alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

Alors $G\begin{pmatrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Systèmes de deux équations à deux inconnues

I) Résumé du cours

A) SYSTEME DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Exemple :

$\begin{cases} 2x-5y=12(E_1) \\ 3x+4y=-5(E_2) \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

- Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples (x ;y)qui vérifient simultanément les équations (E_1) et (E_2)
- Autrement dit c'est trouver les solutions communes aux équations (E_1) et (E_2)

B) METHODE DE RESOLUTION D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

1) Résolution d'un système par substitution

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} x-2y=3(E_1) \\ 4x+5y=12(E_2) \end{cases}$

On exprime x en fonction de y dans (E_1) : x=2y+3 (E_1')On remplace x par 2y+3 dans (E_2) 4(2y+3)+5y=12 signifie 8y+12+5y=12 signifie 13y=12-12Signifie 13y=0 signifie Y=0 On remplace y par 0 dans (E'_1) x=2x0+3 signifie x=3

Vérification :

(E_1) 3-2x0=3-0=3

(E_2) 4x3+5x0=12+0=12

Conclusion : la solution du système est le couple (3 ;0)

2) Résolution par combinaison

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2y=0(E_1) \\ 6x+8y=24(E_2) \end{cases}$

Calcule de x :

- On multiplie les deux membres de l'équation (E_1)par -4 ; on recopie(E_2), on additionne membre à membre les équations puis on calcule x.

$$\begin{cases} -12x-8y=0(E'_1) \\ 6x+8y=24(E_2) \end{cases}$$

-6x=24 signifie x=-4

Calcul de y :

- On multiplie les deux membres de l'équation (E_1) par -2 ; on recopie (E_2), on additionne membre à membre les équations puis on calcule y.

$$\begin{cases} -6x-4y=0(E'_1) \\ 6x+8y=24(E_2) \end{cases}$$

4y=24 signifie y=6

Vérification : Pour x=-4 et y=6

(E_1) 3x(-4)+2x6=-12+12=0

(E_2) 6x(-4)+8x6=-24+48=24

Conclusion : la solution du système est le couple (-4,6)

C) DETERMINER LA FORME ALGEBRIQUE D'UNE FONCTION

1) DETERMINER L'EXPRESSION ALGEBRIQUE D'UNE FONCTION LINEAIRE

Exemple : Une fonction linéaire est telle que f(4)=8

Déterminer son coefficient a, exprimer f(x) en fonction de x.

Solution : f est une fonction linéaire donc de la forme f(x)=ax.

Par hypothèse, l'image de 4 est 8.

Le coefficient a est donc : ax4=8 signifie a = 2

La forme algébrique de la fonction f est donc f(x)=2x

2) DETERMINER L'EXPRESSION ALGEBRIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

Exemple : Une fonction affine f est telle que :f(2)=5 et f(-4)=-1

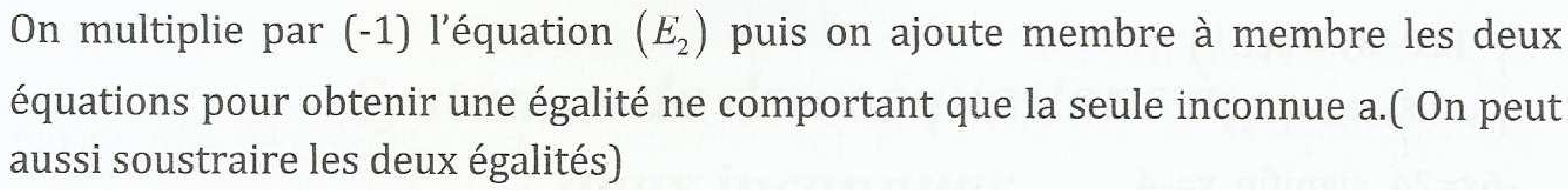
<u>*Solution : Méthode 1*</u> : Utiliser un système d'équationsf est une fonction affine donc de la forme f(x)= ax+b. Il s'agit donc de déterminer a et b. L'image de 2 est 5,

Donc 2a+b = 5 (E_1)

L'image de -4 est -1, donc -4a+b=-1 (E_2)

On résout le système formé des équations (E_1) et (E_2)

$$\begin{cases} 2a+b=5\ (E_1) \\ -4a+b=-1\ (E_2) \end{cases}$$



On multiplie par (-1) l'équation (E_2) puis on ajoute membre à membre les deux équations pour obtenir une égalité ne comportant que la seule inconnue a.(On peut aussi soustraire les deux égalités)

$2a+b=5$

$4a-b=1$

6a=6 donc a=1

On multiplie par 2 l'équation (E_1)puis on ajoute membre à membre les deux équations pour obtenir une égalité ne comportant que la seule inconnue b. (On peut aussi soustraire les deux égalités)

La forme cherchée est donc la fonction affine par f(x)=x+3

Méthode 2 :

On cherche le coefficient directeur, f est une fonction affine de la forme f(x)=ax+b. Il s'agit donc de déterminer a et b.

Calcule de coefficient directeur : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ avec $x_1=2$ et $x_2=-4$

$f(x_1)=f(2)=5$ et $f(x_2)=f(-4)=-1$

Soit $a=\dfrac{f(-4)-f(2)}{-4-2}=\dfrac{-1-5}{-4-2}=\dfrac{-6}{-6}=1$

Calcul de b :

L'image de 2 est 5, donc 2a+b=5 et comme a=1, alors 2x1+b=5

donc 2+b=5 soit b=3

La forme cherchée est donc la fonction affine définie par f(x)=x+3

Méthode graphique

Soit le système $\begin{cases}6x-3y=9\\2x+y=5\end{cases}$

1) On exprime y en fonction de x dans les deux équations

On obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ :

6x-3y=9 On a donc :-3y=9-6x soit $y=\dfrac{-6}{-3}x+\dfrac{9}{-3}$ on obtient donc : y=2x-3

2x+y=5 On a donc y=-2x+5. On obtientle système $\begin{cases}y=2x-3 & (1)\\y=-2x+5 & (2)\end{cases}$

2) Dans un repère, on représente graphiquement les fonctions affines associées au système

La représentation graphique de la fonction affine $x\mapsto 2x-3$ est une droite d'équation y=2x-3 (qui est l'équation (1) du système).On notera cette droite (d1)

Si x=1 alors y=2-3=-1 et si x=0 alors y=-3

La droite (d1) passe par les points A(A ;-1) et B(0,-3)

La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -2x+5$ est une droite d'équation y=-2x+5 alors y=-2+5=3 et si x=3 alors y=-2x3+5=-6+5=-1

La droite (d2) passe par les points C(1 ;3) et B(3 ;-1)

On trace dans un repère les deux droites :

3) On lit les coordonnées du point d'intersection des droites (d1) et (d2).

Les coordonnées du point d'intersection E des deux droites sont : (2 ;1)

Le couple (2 ;1) est solution de ce système

4) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

6x2-3x1=12-3=9 et 2x2+1=4+1=5

Le couple (2 ;1)est bien solution du système $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Remarque :

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (coordonnées non entière, impression des tracés etc..)

Il faut donc toujours vérifier les résultats de la lecture graphique par le calcul.

II) Exercices



1 VRAI-FAUX

Répondre par vrai ou faux

1) Le couple $(-3,7)$ est une solution de l'équation $2x+y-1=0$?

2) Le couple $(-1,2)$ est une solution de l'équation $2x-3y=4$?

3) Le couple $(16,10)$ est une solution de système $\begin{cases} x+y=26 \\ -x+2y=4 \end{cases}$?

4) Dans un système de deux équations ou les inconnues sont x et y, si le couple de solution est (3, -4) cela signifie que – 4 est la valeur de x.

5) Sur une photo, on compte 32 pattes et 15 tètes. Sachant qu'il s'agit d'oiseaux et d'éléphants. Alors le système d'équation qui permet de chercher le nombre d'oiseaux et d'éléphants est :

a) $\begin{cases} 2x+4y=32 \\ x+y=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+4y=32 \\ x+y=15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+4y=32 \\ x+y=15 \end{cases}$



Résolvez graphiquement le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$



Résolvez graphiquement le système $\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$



1) Dans un repère orthonormé d'unité 1cm, placez les points A(0 ;-3) et B(3 ;3)
2) Déterminez une équation de la droite (AB)
3) Tracez dans un repère la droite d d'équation : y=-0,75x+2,5
4) Déterminez graphiquement les coordonnées du point I, intersection de (AB) et de d.
5) En déduire la solution du système : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

5 APPLIQUER

(Résoudre un problème à l'aide d'un système):
Un terrain rectangulaire a un périmètre de 750m.
La longueur mesure 15m de plus que la largeur. Calculer les dimensions du rectangle.

6 APPLIQUER

1) Voici un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y :
$\begin{cases} x + y = 40 \\ 9x + 5y = 312 \end{cases}$
Démontrer, en le résolvant, que ce système admet pour solution x=28 et y=12
2) Un groupe de 40 personnes s'est inscrit pour une visite guidée en bus à Paris. Ce groupe est composé de x adultes er de y enfants.

3) Les adultes paient 90 F et les enfants 50F. Le responsable du groupe a remis 3120 F à l'organisateur du circuit.
Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?



7 APPLIQUER

1) Résoudre le système $\begin{cases} x-3=0 \\ x-y=4,5 \end{cases}$

2) Dans un triangle ABC on donne : AB=6cm ; BC=9cm
M est le point de $[AB]$ tel que AM=2cm
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.
  a) Calculer MN
  b) Donner la valeur de $\frac{AN}{AC}$

3) On suppose que $[NC]$, mesure 4,5 cm et l'on pose AN=y et AC=x.
  a) Etablir les égalités : x-y=4,5 et x-3y=0
  b) Calculer AN et AC, en utilisant éventuellement les questions 1. et 3.a.

8 APPLIQUER

Dans un grand magasin, le prix des compact-disques, en abrégé "CD", est unique, ainsi que celui des bandes dessinées, en abrégé "BD".
Loïc achète 2CD et 3 BD pour 330 francs
Tania achète 4CD et une BD pour 410 francs.
1) Ecrire les équations qui traduisent le texte
2) Résoudre le système d'équations et donner le prix d'un CD et le prix d'une BD.
3) Un mois plus tard, le magasin propose une réduction de 10% sur les CD et 15% sur les BD. Combien aurait alors payé Loïc ?



9 APPLIQUER

1) Résoudre le système $\begin{cases} x+3y=2250 \\ 2x+y=2750 \end{cases}$

2) Pour l'achat d'un tee-shirt et 3 casquettes, André a payé 2250F. Pour l'achet de deux tee-shirts et d'une casquette, Maeva a payé 2750F
Déterminer le prix d'un tee-shirt et d'une casquette.



10 S'ENTRAINER

Résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues (méthode au choix)

$$\begin{cases} 10x+7y=24 \\ 4x-3y+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3a^2 \\ \sqrt{x-y}=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x+2y)-3(2x-y)=38 \\ 4(2x+y)+2(5x-4y)=64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2x+y}=\dfrac{5}{x+2y} \\ \dfrac{7}{3x-2}=\dfrac{5}{6-y} \end{cases}$$



11 SE PERFECTIONNER

1) Résoudre les systèmes de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2-y^2=24 \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

2) Répondre dans l'ordre aux questions posées :
Quelles sont les valeurs possibles de la somme x+y ?
Dans chacun des cas, déduisez-en les solutions du système proposé.

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ (x+y)^2=9 \end{cases} \begin{cases} 2x-5y=19 \\ (x+y)^2=1 \end{cases} \begin{cases} 4x-7y=1 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$$



SE PERFECTIONNER

Valérie dispose d'une somme de 100F pour acheter des livres qu'elle choisit dans deux séries différentes A et B.

Si elle choisit 4livres de la série A et 5 livres de la série B, il lui manque 3F. Si elle choisit 5livres dans les séries A et 3 livres dans la série B il lui reste 0,50.

1) Traduire les données par un système de deux équations.
2) Déterminer le prix d'un livre de chaque sorte



SE PERFECTIONNER

1) Deux nombres A et B ont pour somme 37 et pour différence 5.

Sachant que A est plus grand que B, calculer ces deux nombres.

2) Deux nombres C et D vérifient les équations suivantes $C+D=37$ $C^2-D^2=185$
   a) Après avoir factoriser C^2-D^2, calculer C-D
   b) En déduire les nombres C et D.



SE PERFECTIONNER

Un élève dessine des triangles et des rectangles de façon qu'ils n'aient aucun point commun. Il trace ainsi 34 figures et il compte 108 sommets. On appelle x le nombre de triangles et y le nombre de rectangles.

a) Exprimer, en fonction de x et y, le nombre total de figures, puis de sommet. En déduire un système d'équations d'inconnues x et y.
b) Résoudre ce système, et donner le nombre des rectangles et celui des triangles.



SE PERFECTIONNER

On laisse couler la première fontaine pendant quatre heures et la seconde pendant trois heures. La quantité d'eau recueillie au total est de 55litres.

On laisse couler la première fontaine pendant trois heures et la seconde pendant quatre heures. La quantité d'eau recueillie au total est de 57litres.

1) Traduire les renseignements précédentes par un système de deux équations à deux inconnues.
2) Résoudre le système et indiquer le débit horaire de chacune des deux fontaines.

3) Sachant que ce bassin peut contenir 320 litres, combien faudra-t-il de temps pour le remplir, si les deux fontaines coulent ensemble pendant le même temps ?



SE PERFECTIONNER

Au café da la place, Pierre et ses amis ont commandé 3 cafés et 2 chocolats pour la somme de 42 F.

Paul et ses camarades ont payé, eux 56F pour deux cafés et quatre chocolats. En écrivant, puis en résolvant un système de deux équations à deux inconnues trouver le prix d'un café et le prix d'un chocolat.



SE PERFECTIONNER

a) Résoudre le système suivant $\begin{cases} x+y=630 \\ 18x+30y=14220 \end{cases}$

b) Dans un parc zoologique, la visite coute 30F pour les adultes et 18F pour les enfants ;A la fin d'une journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14220F.

Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?



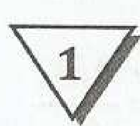
SE PERFECTIONNER

Les deux questions sont indépendantes.

a) Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{2}+\dfrac{4x-7}{3}=\dfrac{y+3}{6} \\ 4x-3y=12 \end{cases}$

b) Une ile sur 18 de l'archipel des Bermudes est habitée contre une ile sur 11 pour l'archipel des Bahamas. Il ya 50 iles habitées sur un total de 690 iles pour l'ensemble des deux archipels.

Calculer le nombre d'iles habitées pour chacun d'eux.



VRAI-FAUX

1) Vrai 2) Faux 3) Vrai 4) Faux

5) si on pose x le nombre d'oiseaux (un oiseau à 2 pattes) et y le nombre d'éléphants (un éléphant à 4 pattes) alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+4y=32 \\ x+y=15 \end{cases}$$



APPLIQUER

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=-6 \end{cases}$$

signifie que $\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=-\dfrac{1}{3}x-2 \end{cases}$ on note d_1

la droite affine d'équation $y=-2x+3$

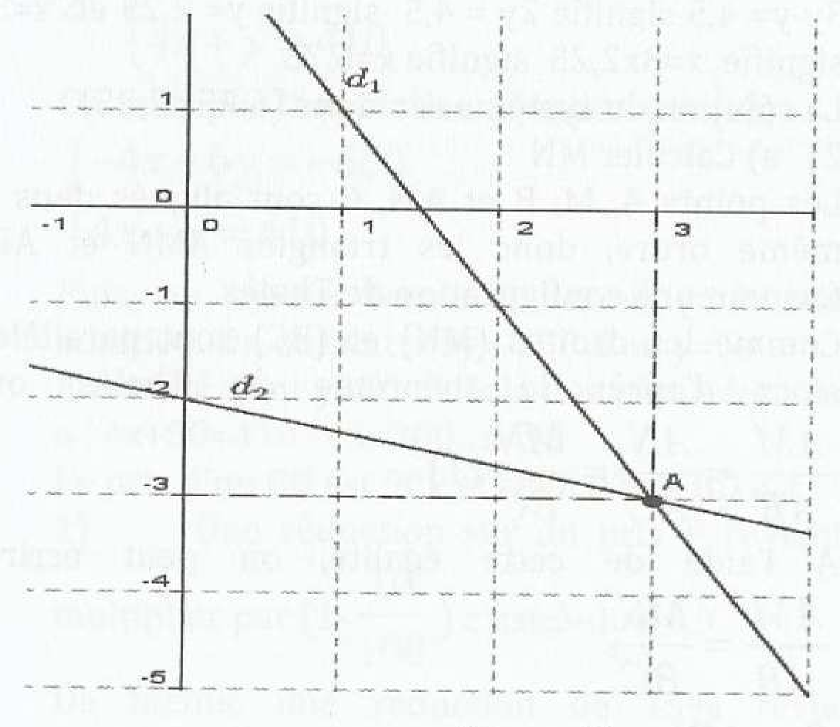
et d_2 la droite affine d'équation $y=-\dfrac{1}{3}x-2$

d_1 :

X	0	1
Y	3	1

d_2 :

X	0	-3
Y	-2	-1



Graphiquement $S_{IR^2}=\{(3,-3)\}$



APPLIQUER

On va exprimer y en fonction de x dans les deux équations :

signifie que $\begin{cases} 5y=17-3x \\ y=2x-7 \end{cases}$

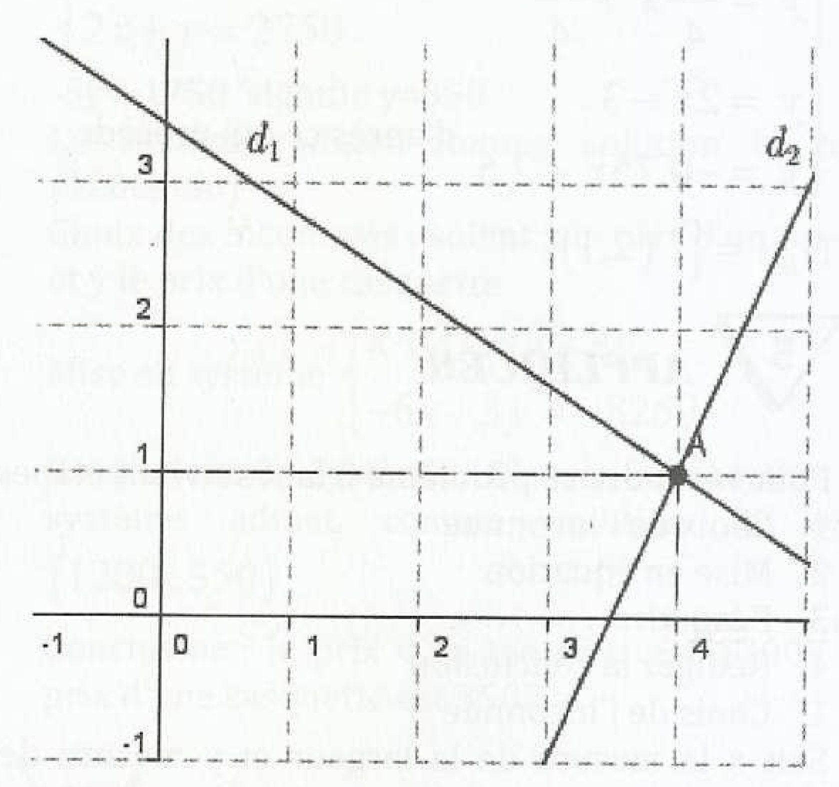
signifie que $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{17}{5} \\ y=2x-7 \end{cases}$ on note d_1 la droite affine d'équation $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{17}{5}$ et d_2 la droite affine d'équation $y=2x-7$

d_1 :

x	-6	-1
y	7	4

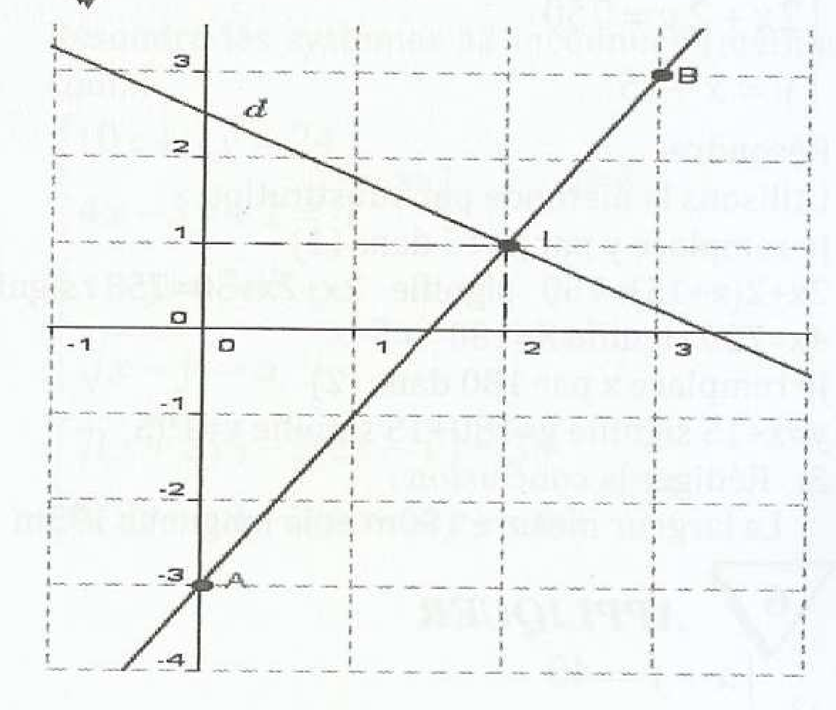
d_2 :

x	3	3
y	-1	3





APPLIQUER



1) Voir figure

2) La droite (AB) est la représentation d'une fonction affine donc son équation est de la forme ax+b

$a=\frac{-3-3}{0-3}=2$ et $b=-3$ ainsi (AB) :

$y=2x-3$

3) Voir figure

4) I(2,1)

5) $\begin{cases}2x-y=3\\3x+4y=10\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}y=2x-3\\4y=-3x+10\end{cases}$

signifie que

$\begin{cases}y=2x-3\\y=\frac{-3}{4}x+\frac{10}{4}\end{cases}$ signifie que

$\begin{cases}y=2x-3\\y=-0.75x+2.5\end{cases}$ d'après ce qui précède

$S_{IR^2}=\{I(2,1)\}$



APPLIQUER

Pour résoudre ce problème il faut suivre 4 étapes.

1. Choix de l'inconnue
2. Mise en équation
3. Résoudre
4. Rédiger la conclusion

1. Chois de l'inconnue

Soit x la mesure de la largeur et y mesure de la longueur.

2. Mise en équation

$\begin{cases}2x+2y=750\\y=x+15\end{cases}$

Résoudre

Utilisons la méthode par substitution :

Je remplace y par x+15 dans (1)

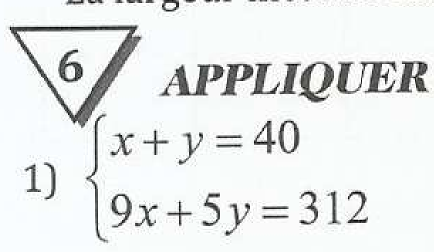
2x+2(x+15)=750 signifie 2x+2x+30=750 signifie 4x=720 signifie X=180

Je remplace x par 180 dans (2)

y=x+15 signifie y=180+15 signifie y=195

3. Rédiger la conclusion :

La largeur mesure 180m et la longueur 195m



6 APPLIQUER

1) $\begin{cases}x+y=40\\9x+5y=312\end{cases}$

On multiplie la première équation par (-9)

$\begin{cases}-9x-9y=-360\\9x+5y=312\end{cases}$

Puis on ajoute terme à terme (méthode par addition)

On obtient : -4y=-48 d'où y=12

En remplaçant y=12 dans la première équation, on a : x+12=40 ; x=28.

Ce système admet bien pour solution x=28 et y=12

2) Le groupe est composé de x adultes et de y enfants donc x+y=40

Les adultes paient 90F et les enfants 50F. Le responsable du groupe a remis 3120F à l'organisateur du circuit, donc 90x+50y=3120

En simplifiant cette équation par 10 on obtient : 9x+5y=312

Le problème se ramène donc au système $\begin{cases}x+y=40\\9x+5y=312\end{cases}$, qui admet, d'après la question 1, comme solution x=28 et y=12.



7 APPLIQUER

1) Résoudre le système $\begin{cases}x-3y=0\\x-y=4,5\end{cases}$

La première équation peut s'écrire x=3y.

En remplaçant dans la deuxième on obtient 3y-y= 4,5 signifie 2y = 4,5 signifie y= 2,25 et x=3y signifie x=3x2,25 signifie x=6,75

La solution du système est donc (6,75 ; 2,25)

2) a) Calculer MN

Les points A, M, B et A,N, C sont alignés dans le même ordre, donc les triangles AMN et ABC forment une configuration de Thalès.

Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on :

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}(1)$

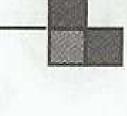
A l'aide de cette égalité, on peut écrire :

$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$

$\frac{2}{6}=\frac{MN}{9}$

MN= 3cm

b) D'après l'égalité (1), on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$



$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$

2) a) Comme le point N appartient au segment $[AC]$, alors AN+NC=AC

Soit AC-AN=NC

x-y=4,5

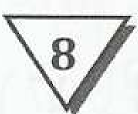
D'après la question 2.b on a :

$\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$

$\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$ Signifie x=3y signifie x-3y=0

b) Calculer AN et AC

AN et AC vérifient le système $\begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=4,5 \end{cases}$ dont les solutions, d'après la question 1, sont x=6,75 et y=2,25 d'où AC=6,75 AN= 2,25



8 APPLIQUER

1) on appelle x le prix, en francs, d'un CD et y celui d'une BD.

2CD et 3BD coutent 330F donc 2x+3y=330

4CDet 1BD coutent 410 F donc 4x+y=410

2) $\begin{cases} 2x+3y=330 \\ 4x+y=410 \end{cases}$

On multiplie la première équation par (-2)

$\begin{cases} -4x-6y=-660 \\ 4x+y=410 \end{cases}$

Puis on ajoute terme à terme (méthode par addition. On obtient : -5y=-250 d'où y=50

En remplaçant y=50 dans la deuxième équation, on a : 4x+50=410 4x=360 x=90

Le prix d'un CD est 90F et celui d'une BD est 50F.

1) Une réduction sur un prix P revient à le multiplier par (1-$\frac{10}{100}$) c'est-à-dire 0,9

De même, une réduction de 15% revient à multiplier le prix par 0,85. Donc un mois plus tard :

2x0,9x90+0,85x50=162+127,5=289,5

Loïc aurait payé 289F50.



9 APPLIQUER

Calcul de x :

En multipliant par -3 l'équation (E_2) et en additionnant membre à membre les deux équations, on a :

$\begin{cases} x+3y=2250 \\ -6x-3y=-8250 \end{cases}$

-5x=-6000 signifie x=1200

Calcul de y :

En multipliant l'équation (E_1) par -2 et en additionnant les deux équations, on a :

$\begin{cases} -2x-6y=-4500 \\ 2x+y=2750 \end{cases}$

-5y=-1750 signifie y=350

Le système admet comme solution le couple (1200,350)

Choix des inconnues : soient x le prix d'un tee-shirt et y le prix d'une casquette

Mise en système $\begin{cases} x+3y=2250 \\ -6x-3y=-8250 \end{cases}$

Résolution du système : D'après la question 1.Le système admet comme solution le couple $(1200:350)$

Conclusion : le prix d'un tee-shirt est 1200F et le prix d'une casquette est 350F



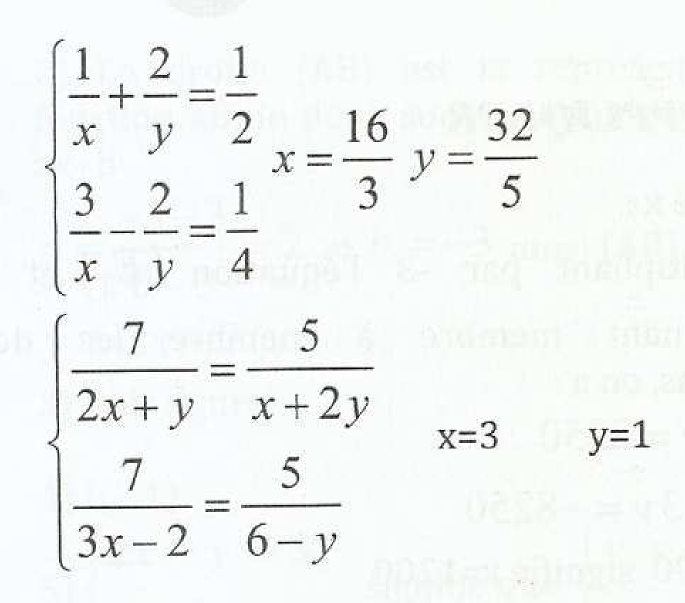
10 S'ENTRAINER

Résoudre les systèmes à2 inconnues (méthode au choix)

$\begin{cases} 10x+7y=24 \\ 4x-3y+2=0 \end{cases}$ x=1 y=2

$\begin{cases} x+y=3a^2 \\ \sqrt{x-y}=a \end{cases}$ x=2a^2 y=a^2

$\begin{cases} 7(x+2y)-3(2x-y)=38 \\ 4(2x+y)+2(5x-4y)=64 \end{cases}$ x=4 y=2



$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\quad x=\frac{16}{3}\ \ y=\frac{32}{5}$$

$$\begin{cases}\dfrac{7}{2x+y}=\dfrac{5}{x+2y}\\[2mm]\dfrac{7}{3x-2}=\dfrac{5}{6-y}\end{cases}\qquad x=3\qquad y=1$$

11 SE PERFECTIONNER

1) (1)+(2) => 2x = -10 => x = -5

(1) => y = -6-x = -6-5 = -11

$S_{IR}=\{(-5,-11)\}$

$$\begin{cases}x+y=1\\ x^2-y^2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ (x-y)(x+y)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1(1)\\ x-y=\dfrac{1}{3}(2)\end{cases}$$

(1)+(2) => 2x = $\frac{4}{3}$ => x = $\frac{2}{3}$

(1) => y = 1- $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$S_{IR}=\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$

2) $(x+y)^2=9\Leftrightarrow x+y=3$ ou $x+y=-3$

on obtient donc deux systèmes :

$S_1:\begin{cases}3x+2y=7(1)\\ x+y=3(2)\end{cases}$ et $S_2:\begin{cases}3x+2y=7(1)\\ x+y=-3(2)\end{cases}$

Résolution de (S_1) :

$(2)\Rightarrow x=3-y$

$(1)\Rightarrow 3(3-y)+2y=7\Rightarrow y=2$ donc $x=3-2=1$, $S_{IR^2}=\{(1,2)\}$

Résolution de (S_2) :

De la même façon on trouve $x=13$ et $y=-16$, $S_{IR^2}=\{(13,-16)\}$

$*(x+y)^2=1\Leftrightarrow x+y=1$ ou $x+y=-1$

on obtient donc deux systèmes :

$(S_1):\begin{cases}2x-5y=19(1)\\ x+y=1\quad(2)\end{cases}$

et $(S_2):\begin{cases}2x-5y=19\\ x+y=-1\end{cases}$

Résolution de (S_1) :

$(2)\Rightarrow x=1-y$

$(1)\Rightarrow 2(1-y)-5y=19\Rightarrow y=-\frac{17}{7}$

donc $x=1+\frac{17}{7}=\frac{24}{7}$, $S_{IR^2}=\left\{\left(\frac{24}{7},-\frac{17}{7}\right)\right\}$

Résolution de (S_2) :

De la même façon on trouve $x=2$ et $y=-3$, $S_{IR^2}=\{(2,-3)\}$

$*(x+y)^2=9\Leftrightarrow x+y=3$ ou $x+y=-3$

on obtient donc deux systèmes :

$S_1:\begin{cases}4x-7y=1(1)\\ x+y=3(2)\end{cases}$ $S_2:\begin{cases}4x-7y=1(1)\\ x+y=-3(2)\end{cases}$

Résolution de (S_1) :

$(2)\Rightarrow x=3-y$

$(1)\Rightarrow 4(3-y)-7y=1\Rightarrow 7-11y=1\Rightarrow y=\frac{11}{6}$

donc $x=\frac{7}{6}$, $S_{IR^2}=\left\{\left(\frac{7}{6},\frac{11}{6}\right)\right\}$

Résolution de (S_2) :

De la même façon on trouve

$x=\frac{20}{11}$ et $y=-\frac{13}{11}$



SE PERFECTIONNER

1) $\begin{cases} 4A+5B=103(1) \\ 5A+3B=99.5(2) \end{cases}$

2) $5\times(1)-4\times(2)$ donne 25B – 12 B =515 – 398 = 117 donc B = 9.

(1) donne 4A = 103-5B = 103 – 45 = 58 → A = 14.5



SE PERFECTIONNER

1) $\begin{cases} A+B=37(1) \\ A-B=5(2) \end{cases}$ et A>B

(1)+(2) donne 2A = 42 signifie que A =21
(1) donne B = 37 – A = 37 – 21 = 16

2) a) $C^2-D^2=(C-D)(C+D)=185$ donc $37(C-D)=185$ ainsi $C-D=5$

b) $\begin{cases} C+D=37 \\ C-D=5 \end{cases}$ d'après 1) on trouve C = 21 et D = 16

SE PERFECTIONNER

1)a) X+Y= 3
3X+4Y= 108

Donc on obtient un système $\begin{cases} X+Y=34 \\ 3X+4Y=108 \end{cases}$

b) $\begin{cases} X+Y=34 & (1) \\ 3X+4Y=108 & (2) \end{cases}$

(2)–3×(1) donne Y = 6
(1) donne X = 28
Donc l'élève dessine 28 triangles et 6 rectangles



SE PERFECTIONNER

1) $\begin{cases} 4X+3Y=55(1) \\ 3X+4Y=57(2) \end{cases}$

3×(1) – 4×(2) donne -7y = 165–228 = -63

$Y=\frac{63}{7}=9$

(1) Donne 4X = 55–3Y = 55–27 = 28
=> X = 7
Donc le débit horaire de la 1ère fontaine est égal à 7 et le débit horaire de la 2émé fontaine est égal à 9
2) soit t le temps nécessaire pour remplir le bassin on a donc :
$7t+9t=320$ signifie que
$16t=320 \Rightarrow t=20h$



SE PERFECTIONNER

Soit x le prix d'un café et y le prix d'un chocolat, on obtient le système suivant

$\begin{cases} 3x+2y=42 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=42(1) \\ x+2y=28(2) \end{cases}.$

Fait $(1)-3\times(2)$ on trouve $-4y=-42 \Rightarrow y=10.5$

$(2) \Rightarrow x=7$



SE PERFECTIONNER

a) $\begin{cases} X+Y=630 \\ 6X+10Y=4740 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=630(1) \\ 3X+5Y=2370(2) \end{cases}$

3×(1) –(2) donne -2Y = -480 => Y = 240
(1) => X = 630–240 = 390
b) soit X le nombre des enfants et Y le nombre d'adultes on a donc le système suivantes

$\begin{cases} 18X+30Y=14220 \\ X+Y=630 \end{cases}$ D'après a)

X = 390 et Y = 240



SE PERFECTIONNER

a) $\begin{cases} \frac{2X+Y}{2}+\frac{4X-7}{3}=\frac{Y+3}{6} \\ 4X-3Y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} 6X+3Y+8X-14=Y+3 \\ 4X-3Y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} 14X+2Y=17(1) \\ 4X-3Y=12(2) \end{cases}$

4×(1) −14×(2) donne
$8Y+42Y=68-168$

$50Y=-100 \Rightarrow Y=-2$

(1) => 14X= 17−2Y = 17+4 = 21

$S_{IR^2}=\{(21,-2)\}$

b) Soit x le nombre d'iles de l'archipel des Bermudes habité et y le nombre d'iles de l'archipel des Bahamas habité alors on obtient :

$$\begin{cases} 18x+11y=690(1) \\ x+y=50 \quad (2) \end{cases}$$

$(1)-11\times(2) \Rightarrow 7x=690-550=140 \Rightarrow x=20$

$(2) \Rightarrow y=50-x=50-20=30$

Donc il y'a 20 iles de l'archipel des Bermudes habité et 30 iles de l'archipel des Bahamas habité

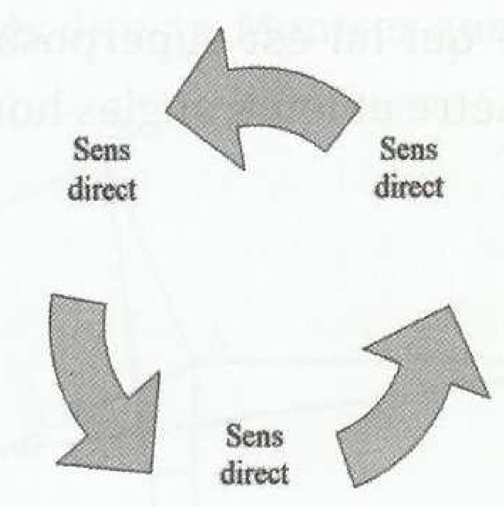
Quart de tour

I) Résumé de cours

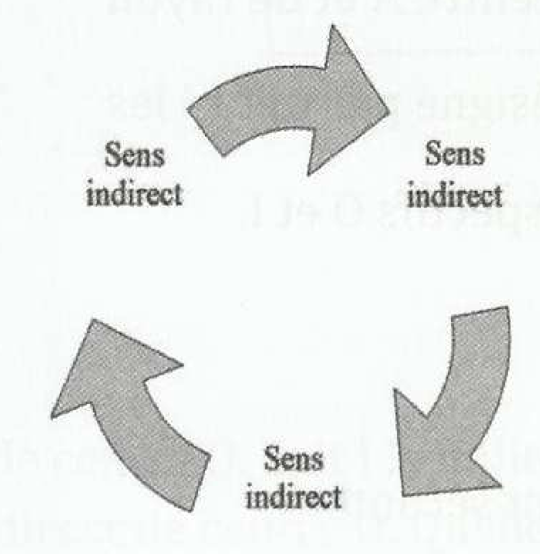
A) Orientation du plan :

On convient que :

Le sens direct est le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre.



Le sens indirect est le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.



B) Quart de tour direct:

Soit I un point du plan. Le point M' est l'image d'un point M distinct de I par un quart de tour direct de centre I si IM = IM' et $\widehat{MIM'}=90°$ dans le sens direct.

C) Quart de tour indirect:

Soit I un point du plan.Le point M'est l'image d'un point M distinct de I par un quart de tour indirect de centre I , si IM = IM' et $\widehat{MIM'}=90°$ dans le sens indirect.

Remarques:

✦ Si le point M' est l'image d'un point M distinct de I par un quart de tour de centre I ; Alors le triangle IMM' est rectangle et isocèle en I.

✦ L'image du point I par un quart de tour de centre I est le point I.

Propriétés :

L'image, par un quart de tour d'un(e) :

❖ segment est un segment qui lui est isométrique.

❖ droite est une droite qui lui est perpendiculaire.

❖ cercle est un cercle de même rayon et de centre l'image du centre du cercle.

❖ polygone est un polygone qui lui est superposable. En particulier, ils ont la même aire, le même périmètre et leurs angles homologues sont isométriques.

II) Exercices

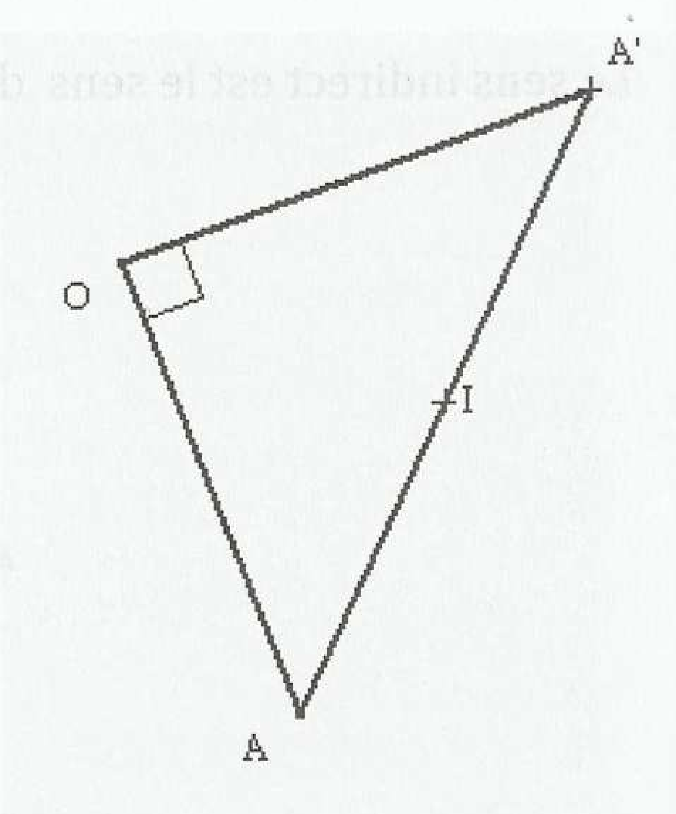


1 VRAI-FAUX

1) Effectuer un quart de tour c'est tourner de 90°

2) On donne la figure ci-contre :

On pose OA = a et (ζ) le cercle de centre A et de rayon $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, I est le milieu de [AA']. On désigne par r et r ' les quarts de tour direct de centres respectifs O et I.



a) r(A) = A'

b) r(A') = A

c) r ((OA')) = (OA)

d) On note r (ζ) = ζ', ζ et ζ' sont sécants

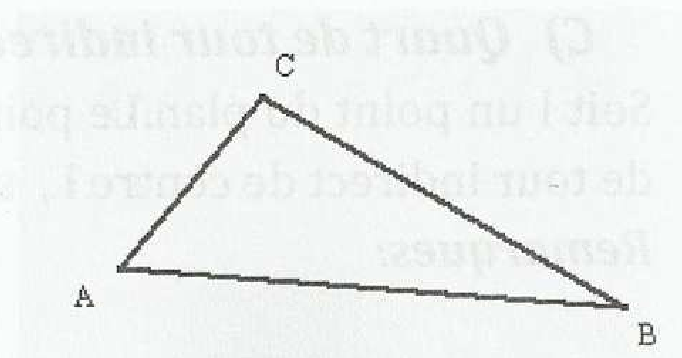
e) r ' (O) = A '

f) r ' ((OA)) = (OI)



2 APPLIQUER

Soit ABC un triangle comme indique-la figure ci-contre :



1) a) Recopier la figure

b) Construire le point D image du point A par le quart de tour direct r de centre B, puis le point E image de C par le même quart de tour.

2) a) Construire F l'image du point C par le quart de tour direct r ' de centre A

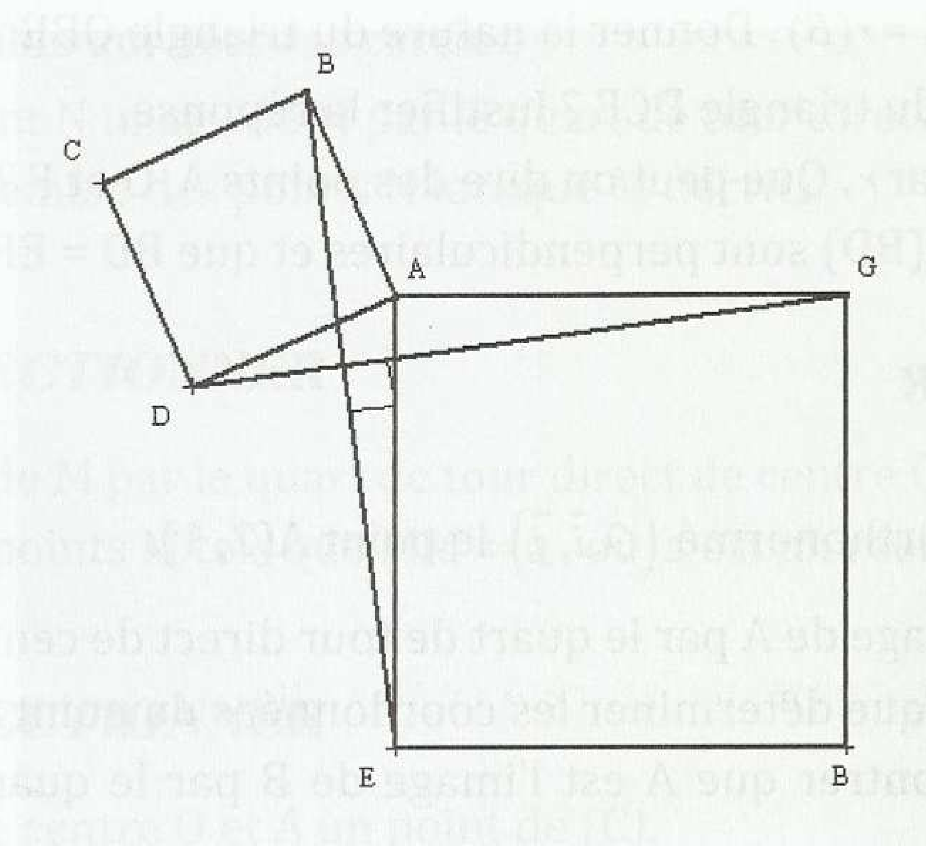
b) Montrer que AF = DE

3) Montrer que les droites (AF) et (DE) sont parallèles.



4 APPLIQUER

ABCD et AEFG sont deux carrés directs. Montrer que EB = DG et que (EB) ⊥ (DG).





4 APPLIQUER

ABCD est un carré direct de centre O. Soit I le milieu de [AD] et J celui de [CD].

1) Soit r le quart de tour direct de centre O. Quelles sont les images de A, D, C et J par r ?

2) En déduire que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaire.



5 S'ENTRAINER

1) Construire un carré ABCD de centre O et marquer les points I, J, K et L milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

2) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Prouver le résultat.

3) a) Déterminer l'image de la droite (BC) par le quart de tour direct r de centre A.

b) Déterminer les images des segment [IB] et [IJ] par r.

c) Déterminer l'image de la droite (LK) par r .



6 S'ENTRAINER

Soit ABCD un parallélogramme direct, on trace à l'extérieur de ABCD le triangle OAD rectangle et isocèle en O. Soit r le quart de tour direct de centre O.

1) Quelle est l'image de A par r ?

2) Construire le point E = $r(B)$. Donner la nature du triangle OBE.

3) Quelle est la nature du triangle DCE ? Justifier la réponse.

4) Soit F l'image de D par r . Que peut on dire des points A, O et F ?

5) Montrer que (EF) et (BD) sont perpendiculaires et que BD = EF.



7 S'ENTRAINER

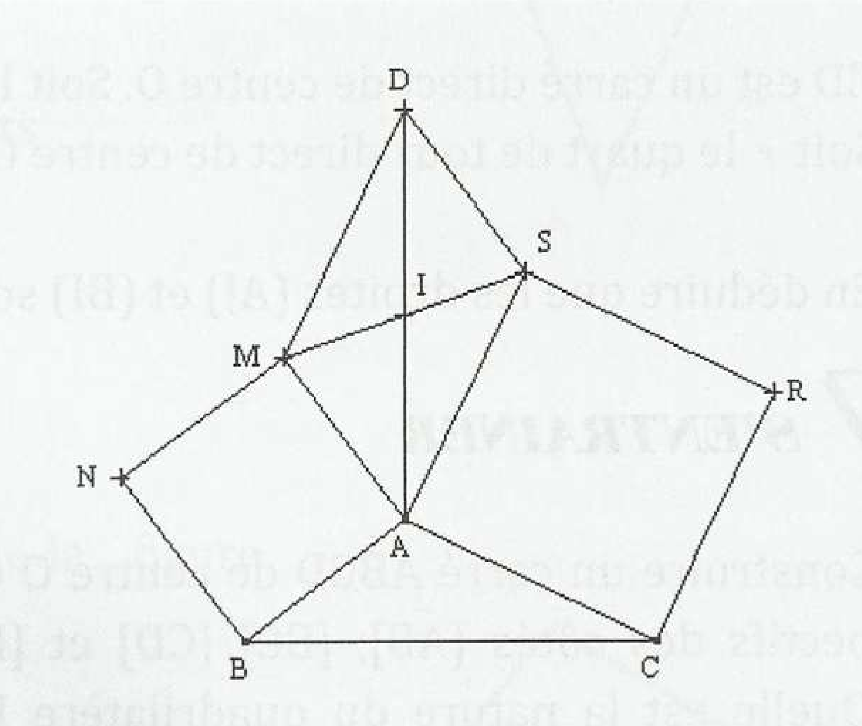
Placer dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ le point A(2, 1).

1) Construire A ' l'image de A par le quart de tour direct de centre O
2) Par lecture graphique déterminer les coordonnées du point A ' puis calculer AA'
3) Soit B (1, - 2). Montrer que A est l'image de B par le quart de tour direct de centre O
4) Montrer que (AB) est perpendiculaire à (AA ')



8 SE PERFECTIONNER

Soit ABC un triangle de sens direct du plan. On construit extérieurement au triangle les carrés ACRS et BAMN puis le parallélogramme MASD dont on notera I le centre. On considère r le quart de tour direct de centre A.



1) Déterminer les images des points M et C par r.

2)a) Construire S' l'image de S par r.

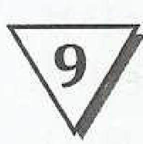
b) Montrer que A est le milieu de [CS'].

3) On note I' l'image de I par r.

a) Montrer que I' est le milieu de [BS'].

b) Construire alors le point I'.

4) Déduire des questions précédentes que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que AD = BC.



SE PERFECTIONNER

Soit ζ un cercle de centre O et de rayon R ; A est point non situé sur ζ .

M est un point variable qui décrit le cercle ζ .

1) Construire le point N image de M par le quart de tour direct de centre A.

2) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit ζ .



SE PERFECTIONNER

On note M' l'image de M par le quart de tour direct de centre O.

Quel est le lieu des points M tels que MM' = a , où a est un réel donné ?



SE PERFECTIONNER

Soit (C) un cercle de centre O et A un point de (C).

1) Construire l'image O' de O et l'image (C') de (C) par le quart de tour direct de centre A.
2) Montrer que la droite (OA) est tangente en A à (C').
3) On désigne par B le point d'intersection des cercles (C) et (C') autre que A. Préciser la nature du quadrilatère AOBO'.



SE PERFECTIONNER

I. Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que r(B) = C où r est le quart de tour direct de centre A et AB = 3 cm

II. Soit H le symétrique de B par rapport à (AC)

1) Montrer que r(C) = H
2) Donner les coordonnées de A, B, C et H dans le repoère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
3) Déterminer les coordonnées du point M milieu de [BC]

4) Construire M ′ = r(M) et montrer que M ′ est le milieu de [CH]
5) Montrer que MM ′ = AC. Quelle est la nature du quadrilatère AMCM′ ?
6) Construire les points I(2, 0) et J(0, 2)
7) Construire les cercles ζ et ζ' de centres respectifs I et J et de rayon 2 cm
8) Montrer que $r(\zeta) = \zeta'$.



VRAI-FAUX

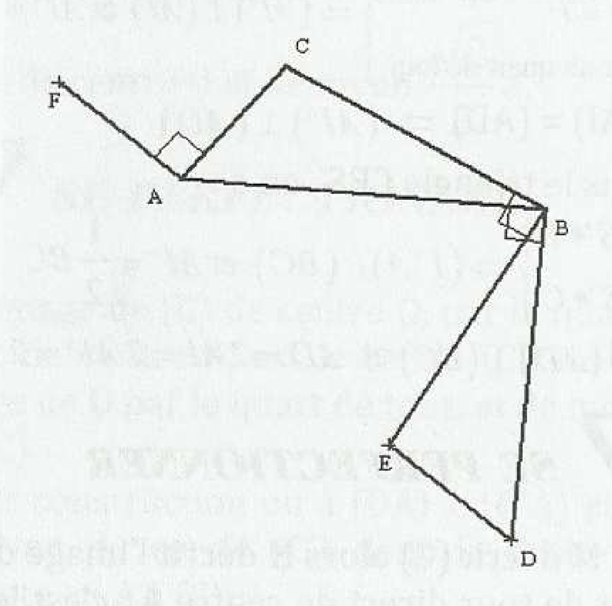
1) Vrai
2) a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai ; d) Faux ; e) Faux ; f) Faux.



APPLIQUER

r(A) = D et r(C) = E ⇒ AC = DE et (AC) ⊥ (DE) (1)
Deplus on a r ' (C) = F ⇒ AC = AF et (AC) ⊥ (AF) (2)

(1) Et (2) ⇒ AF = DE et (AF) // (DE)





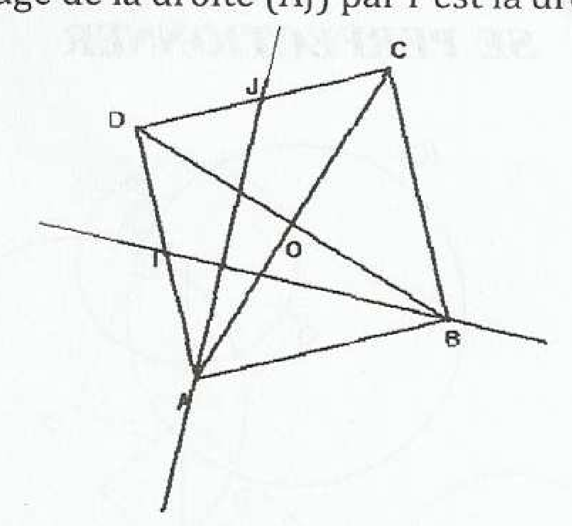
APPLIQUER

On considère le quart direct r de centre A.
On a r(E) = G et r(B) = D
⇒ EB = DG et (EB) ⊥ (DG).



APPLIQUER

1) r (A) = B ; r(D) = A ; r(C) = D ; r(J) = I
2) L'image de la droite (AJ) par r est la droite

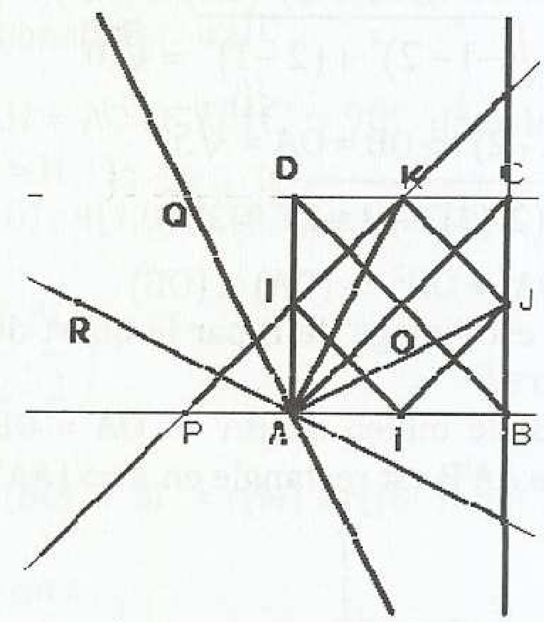


(BI), il suit que les droites
(AJ) et (BI) sont perpendiculaires



S'ENTRAINER

1)



2) IJKL est un parallélogramme, en effet ses cotés opposés sont deux à deux parallèles ((IJ) // (AC) et (LK) // (AC) ; (JK) // (BD) et (IL) // BD) : droites des milieux), de plus ses cotés sont isométriques (LK= LI = IJ = JK = AB$\sqrt{2}$),IJKL est alors un losange, enfin ses diagonales sont isométriques et orthogonales. IJKL est donc un carré.

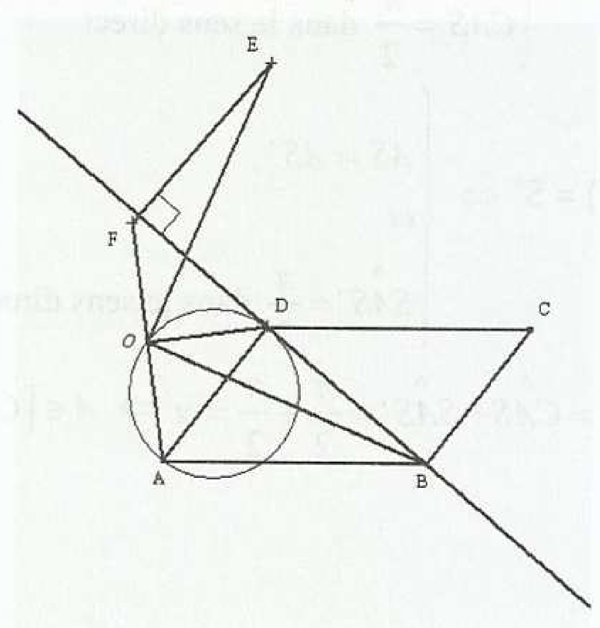
3) a) r(B) = C donc r(BC) est la perpendiculaire à (BC) passant par C.

b) $r[IB] = [LD]$; $r[IJ] = [LQ]$.

c) r(L) = P donc r(LK) est la perpendiculaire à (LK) passant par P.

6 S'ENTRAINER

1. r(A) = D
2. OBE est rectangle et isocèle en O
3. r(A) = D et r(B) = E ⇒ AB = DE et (AB) ⊥ (DE)
Or AB = DC et (AB) // (DC)
⇒ DC = DE et (DC) ⊥ (DE)
⇒ DCE est rectangle et isocèle en D
4. A, O et F sont alignés
5. r(B) = E et r(D) = F
⇒(EF) et (BD) sont perpendiculaires et BD = EF





S'ENTRAINER

3) D'après le graphique on a : A ′ (- 1, 2)

$\Rightarrow AA'\sqrt{(-1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

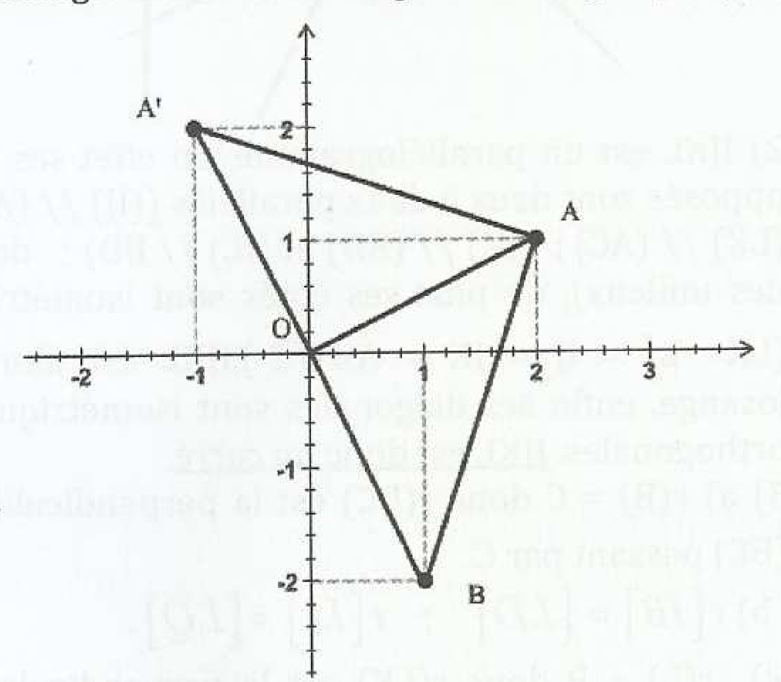
4) B(1, - 2) ⇒ OB = OA = $\sqrt{5}$

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$

$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow (OA)\perp(OB)$

D'où A est l'image de B par le quart de tour direct de centre O

5) O est le milieu de BA′ et OA = OB = OA′⇒ le triangle AA′B est rectangle en A ⇒ (AA′) ⊥ (AB)



8 SE PERFECTIONNER

1) r(M) = B car $\begin{cases} AM = AB \\ et \\ \hat{MAB}=\frac{\pi}{2} \text{ dans le sens direct}\end{cases}$

r(C) = S car $\begin{cases} AC = AS \\ et \\ \hat{CAS}=\frac{\pi}{2} \text{ dans le sens direct}\end{cases}$

2) a) r(S) = S′ ⇔ $\begin{cases} AS = AS' \\ et \\ \hat{SAS'}=\frac{\pi}{2} \text{ dans le sens direct}\end{cases}$

b) $\hat{CAS'}=\hat{CAS}+\hat{SAS'}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow A\in[CS']$

De plus on a : $AC = AS$ et $AS = AS' \Rightarrow AC = AS'$. D'où A est le milieu de [CS′].

3) r(I) = I′

a)

$\left.\begin{array}{l} r(M)=B \\ r(S)=S' \\ I \text{ est le milieu de [MS]} \\ \text{r conserve le milieu}\end{array}\right\}\Rightarrow r(I)=I'$ est le milieu de [BS′]

b) (Voir figure)

4)

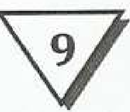
$* \left.\begin{array}{l} r(A)=A \\ r(I)=I' \\ r \text{ est un quart de tour}\end{array}\right\}\Rightarrow (AI')\perp(AI)$ et $AI'=AI$

or (AI) = (AD) ⇒ $(AI')\perp(AD)$

* Dans le triangle CBS′, on a :

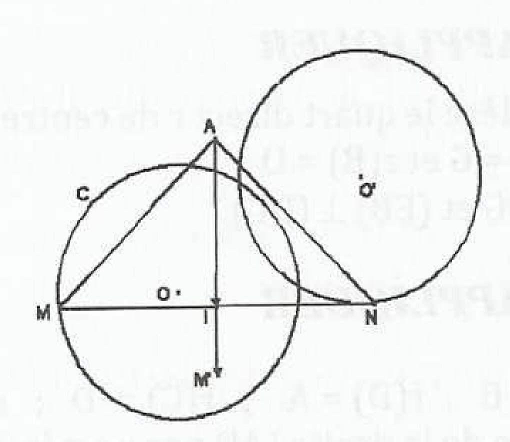
$\left.\begin{array}{l} I'=S'*B \\ A=S'*C\end{array}\right\}\Rightarrow (I'A)//(BC)$ et $AI'=\frac{1}{2}BC$

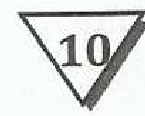
Ainsi $(AD)\perp(BC)$ et $AD=2AI=2AI'=2AI=BC$.



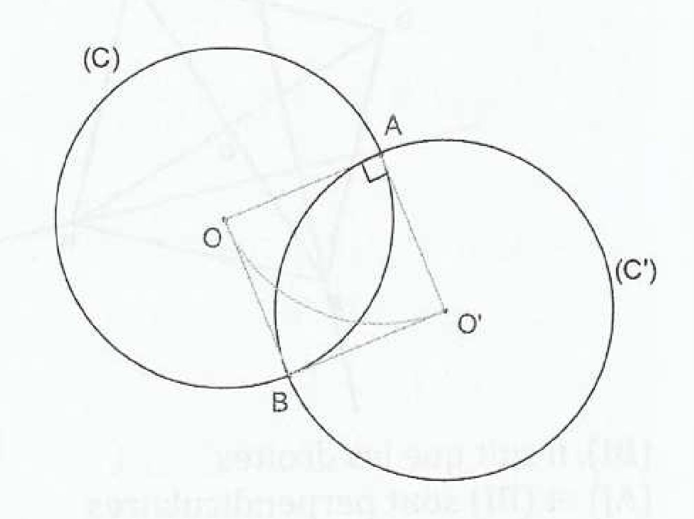
SE PERFECTIONNER

2) Si M décrit (C) alors N décrit l'image de (C) parle quart de tour direct de centre A : c'est le cercle de centre O′ et de rayon R.





SE PERFECTIONNER



Le triangle OMM' est rectangle et isocèle en M, dans le sens direct. D'après le théorème de Pythagore :

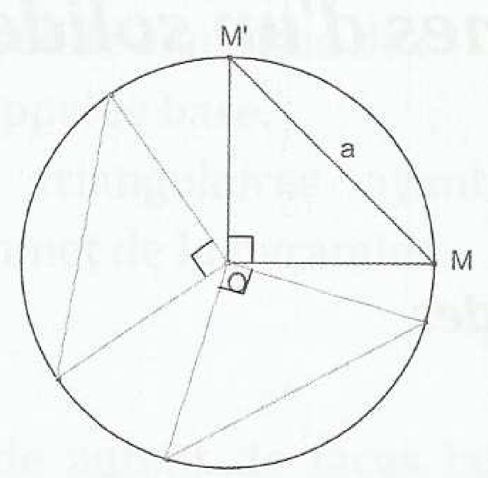
$OM^2 + OM'^2 = MM'^2$

$OM^2 + OM^2 = a^2$

$2\ OM^2 = a^2$

$OM^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$OM = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$



Donc le lieu des points M tells que MM' = a est le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a.



SE PERFECTIONNER

1) L'image de (C) de centre O, par le quart de tour direct de centre A, est le cercle (C') de centre O', l'image de O par le quart de tour, et de même rayon que (C).

2) Par construction on a (OA) $\perp$ (O'A) et [O'A] est un rayon du cercle (C') donc la droite (OA) est tangente en A à (C').

3) Comme O' est l'image de O par le quart de tour direct de centre A on a : AO = AO' et (AO) $\perp$ (AO').

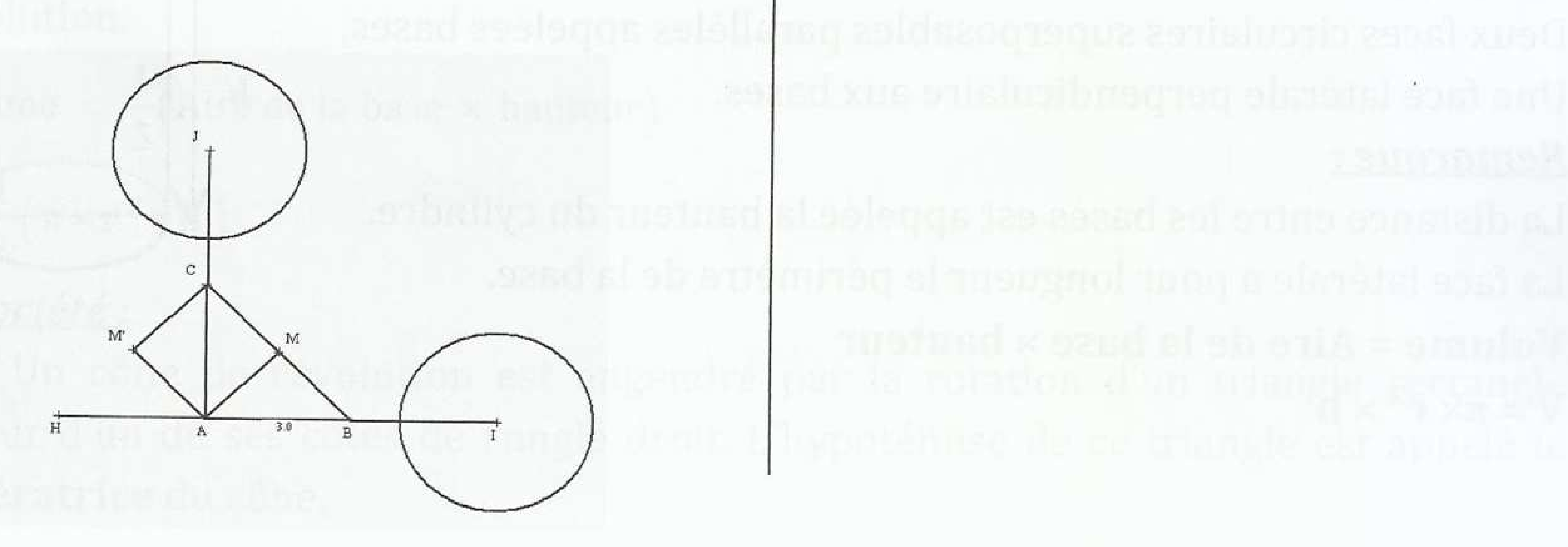
De plus [OB] est un rayon de (C) et [O'B] un rayon de (C') d'où OB = O'B.

On en déduit que le quadrilatère AOBO' a ses quatre côtés de même longueur et un angle droit entre deux côtés consécutifs donc c'est un carré.



SE PERFECTIONNER

I.



II. 1) AH = AB (la symétrie axiale conserve les distances)et AB = AC $\Rightarrow$ AH = AC de plus on a (AB) $\perp$ (AC) $\Rightarrow$ (AH) $\perp$ (AC) (la symétrie axiale conserve l'orthogonalité)

Ainsi AH = AC et $\widehat{HAC} = 90°$ dans le sens direct $\Rightarrow$ r(C) = H

2) A(0, 0) ; B(1,0) ; C(0,1) et H(-1, 0)

3) $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

4) M $\in$ [BC] $\Rightarrow$ M ' = r(M) $\in$r([BC]) = [CH]

De plus on a

MC = MB, r([MC]) = [M'H] et r([MB]) = [M'C])

$\Rightarrow$ M'H = MC = MB = M'C

Ainsi M' est le milieu de [CH]

5)Dans le triangle CHB isocèle en C, on a M milieu de [CB] et M' milieu de [CH]

$\Rightarrow MM' = \dfrac{BH}{2} = AB = AC$

AMCM' est un rectangle (trois angles droits) et les deux diagonales [AC] et [MM'] sont isométriques donc c'est un carré

6) et 7) Voir figure

8) r(ζ) est le cercle de centre r(I) = J et de même rayon donc c'est ζ'

Sections planes d'un solide

I) Résumé de cours

A) Définitions des principaux solides

Prisme droit

Définition :

Un prisme droit est un solide constitué de :

Deux faces polygonales superposables parallèles appelées bases.

De faces latérales rectangulaires perpendiculaires aux bases.

Remarque :

La distance entre les bases est appelée la hauteur du prisme droit.

La hauteur du prisme droit est perpendiculaire aux deux bases

Volume = Aire de la base × hauteur



Prismes particuliers (Pavé ou parallélépipède rectangle) :

Le cube est un prisme droit à base carrée dont la hauteur est égale au côté de la base.

Le pavé droit (ou parallélépipède rectangle) est un prisme droit à base rectangulaire.

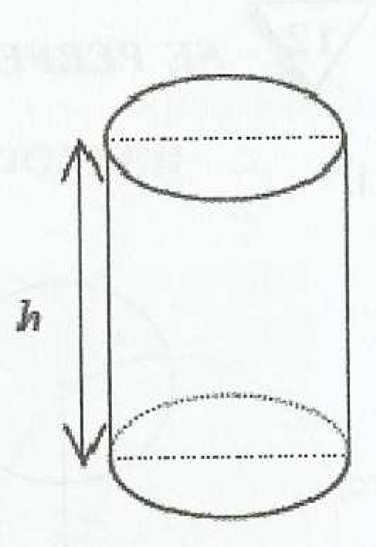
Cylindre de révolution

Définition :

Un cylindre est un solide qui possède :

Deux faces circulaires superposables parallèles appelées bases.

Une face latérale perpendiculaire aux bases.



Remarque :

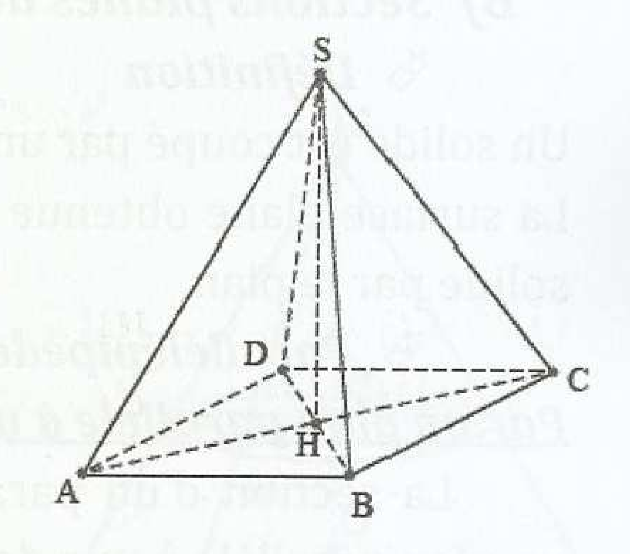
La distance entre les bases est appelée la hauteur du cylindre.

La face latérale a pour longueur le périmètre de la base.

Volume = Aire de la base × hauteur

$V = \pi \times r^2 \times h$

Pyramide



Définition :

Une pyramide est un solide constitué de :

Une face polygonale appelée base.

Des faces latérales triangulaires ayant un sommet commun S appelé sommet de la pyramide.

Remarque :

Une pyramide possède autant de faces latérales que sa base a de côtés.

La distance entre le sommet et le plan de base est appelée la hauteur de la pyramide.

Volume $= \frac{1}{3}$**(Aire de la base × hauteur)**

Pyramide particulière :

Une pyramide est dite régulière lorsque :

Sa base est un polygone régulier (triangle équilatéral, carré, ..).

Sa hauteur passe par le centre de sa base.

Cône de révolution

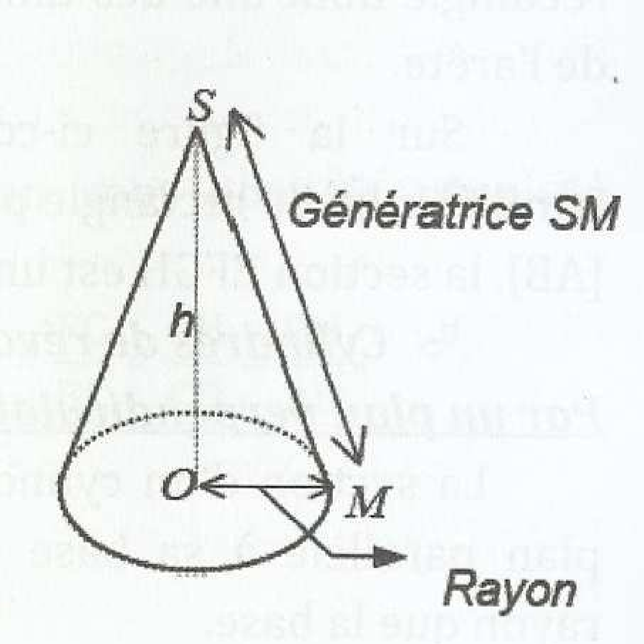
Définition :

Un cône de révolution est un solide constitué de :

Une face circulaire de centre O appelée base.

Une face latérale qui est un secteur circulaire de centre S.

Ce point S est le sommet du cône.



Remarques :

La distance SO est appelée la hauteur du cône de révolution.

Volume $= \frac{1}{3}$(Aire de la base × hauteur)

$$V = \frac{1}{3}(\pi \times r^2 \times h)$$

Propriété :

Un cône de révolution est engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un de ses côtés de l'angle droit. L'hypoténuse de ce triangle est appelé la **génératrice** du cône.

B) Sections planes de solides

↳ Définition

Un solide est coupé par un plan.
La surface plane obtenue à l'intersection du solide et du plan s'appelle la section du solide par le plan.

↳ Parallélépipèdes rectangles

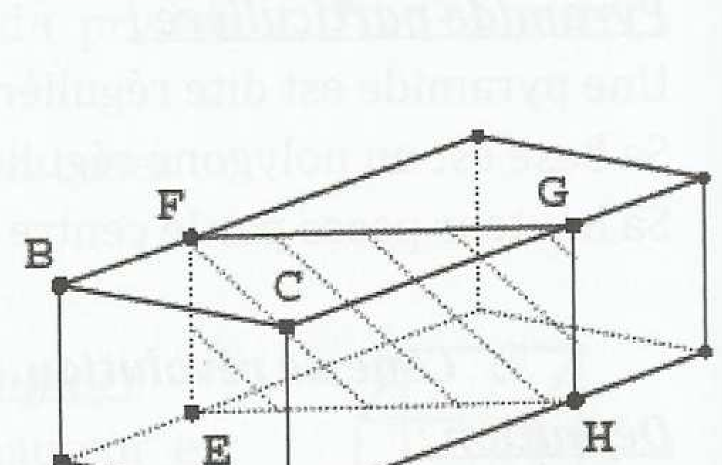
Par un plan parallèle à une face :

La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une de ses faces est un rectangle de mêmes dimensions que la face.

Sur la figure ci-contre, on a coupé le parallélépipède rectangle parallèlement à sa face ABCD, la section est le rectangle EFGH qui a les mêmes dimensions que le rectangle ABCD : AB = EF et BC = FG.



Par un plan parallèle à une arête :



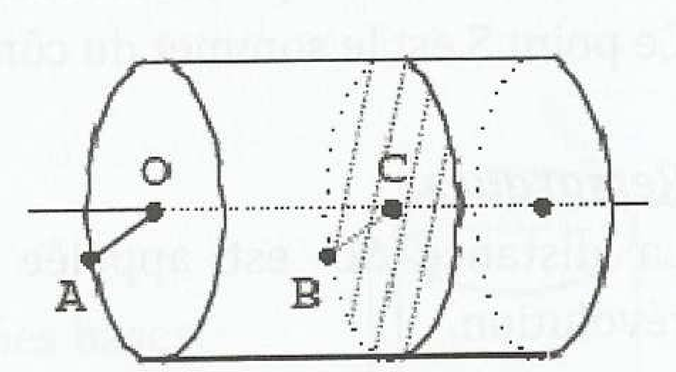
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une de ses arêtes est un rectangle dont une des dimensions est la longueur de l'arête.

Sur la figure ci-contre, on a coupé le parallélépipède rectangle parallèlement à son arête [AB], la section EFGH est un rectangle tel que AB = EF.

↳ Cylindres de révolution



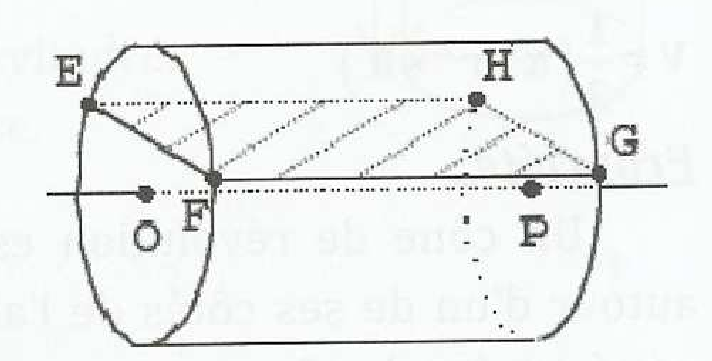
Par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre :



La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle de même rayon que la base.

Sur la figure ci-contre, on a coupé le cylindre parallèlement à sa base, la section est le cercle de centre C de rayon BC = AO.

Par un plan parallèle à l'axe du cylindre :



La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle dont une dimension est la hauteur du cylindre.

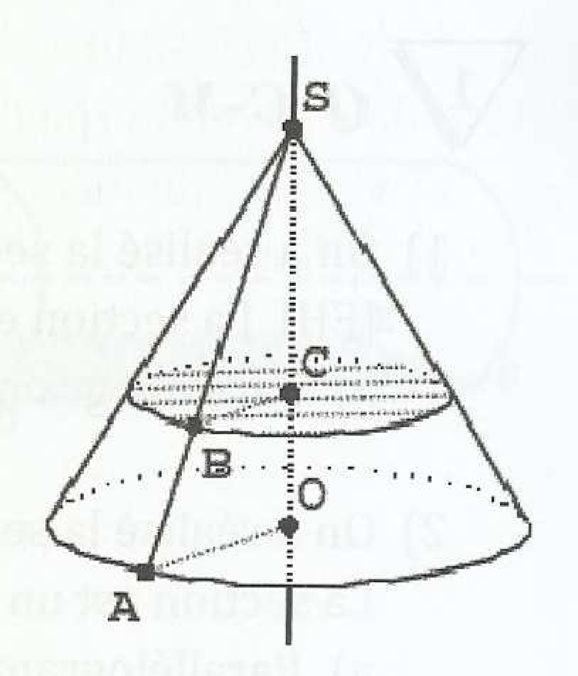
Sur la figure ci-contre, on a coupé le cylindre parallèlement à son axe, la section est le rectangle EFGH tel que FG = OP.

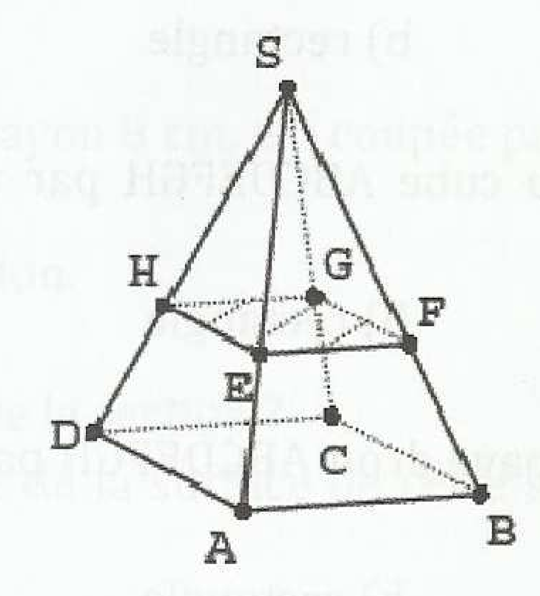
Pyramides et cônes de révolution

Par un plan parallèle à la base :

La section d'un cône de révolution ou d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction de la base.

Sur la figure ci-contre, on a coupé le cône et la pyramide parallèlement à leurs bases, les sections respectivement le cercle de centre C de rayon BC et le polygône EFGH.





Rapports de réduction :

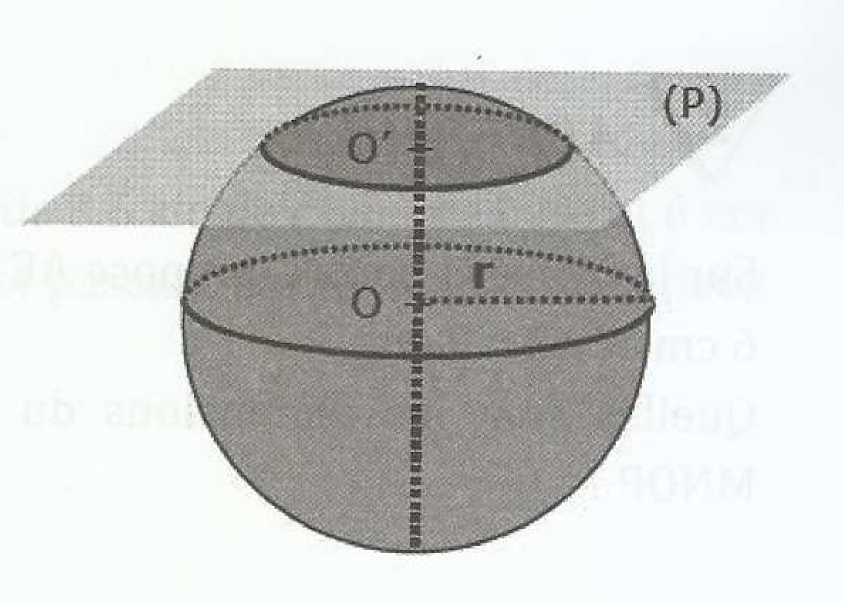
Sur les figures précédentes, les rapports de réduction sont pour le cône de révolution :

$\frac{SB}{SA}=\frac{SC}{SO}=\frac{BC}{AO}$ et pour la pyramide : $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}=\frac{SG}{SC}=\frac{SH}{SD}=\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}=\frac{EH}{AD}$

Sphères

Par un plan :

La section plane d'une sphère par un plan (P) est uncercle.



Remarque :

R étant le rayon de la sphère, la propriété est vraie si OO'< R.

Si OO'> R alors il n'ya pas de point d'intersection entre la sphère et le plan.

Si OO' = 0 alors la section est un grand cercle de la sphère.



II)Exercices

1 Q-C-M

1) On a réalisé la section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [EH]. La section est un :
a) Parallélogramme b) rectangle c) carré

2) On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [GH]. La section est un :
a) Parallélogramme b) rectangle c) carré

3) On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à la face ADHE. La section est un :
a) Parallélogramme b) rectangle c) carré

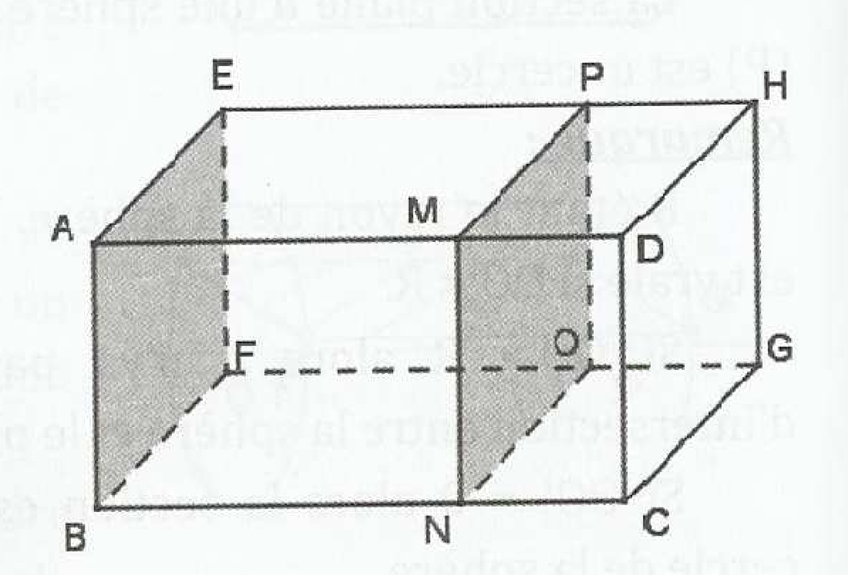
4) On a réalisé la section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à la face ABCD. La section est un :
a) Parallélogramme b) rectangle c) carré



5) La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe est un :
a) Parallélogramme b) rectangle c) carré

6) La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est un :
a) Disque b) cercle c) carré

2 APPLIQUER

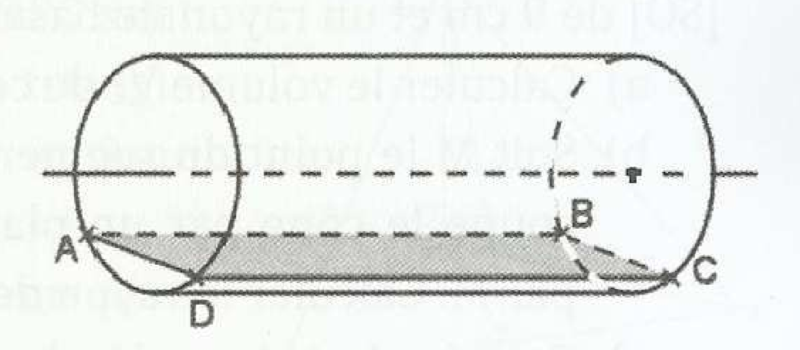


Sur la figure ci-contre, on pose AE = 3 cm, AD = 6 cm et AB = 2 cm.
Quelles sont les dimensions du quadrilatère MNOP ?



APPLIQUER

Le cylindre de révolution ci-contre a une hauteur de 6 cm.
La corde [AD] mesure 1, 5 cm.
Quelle est l'aire du quadrilataire ABCD, section du cylindre par le plan parallèle à l'axe et contenant la corde [AD] ?

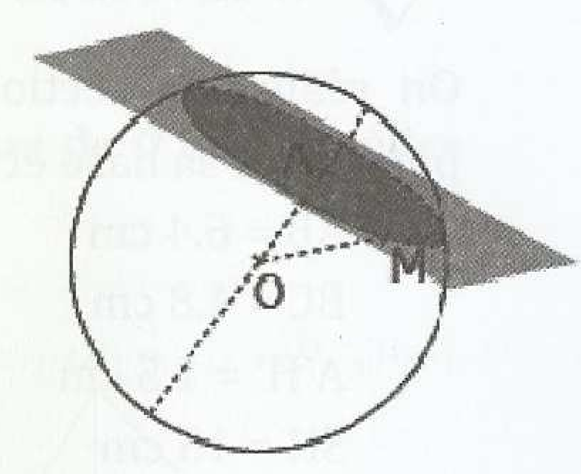




S'ENTRAINER

Une boule de centre O, de rayon 8 cm, est coupée par un plan qui passe par le point A.
M est un point de cette section.
OA = 3 cm.

a) Quelle est la nature de la section ?
b) Calculer l'aire exacte de la surface de cette section en cm^2.

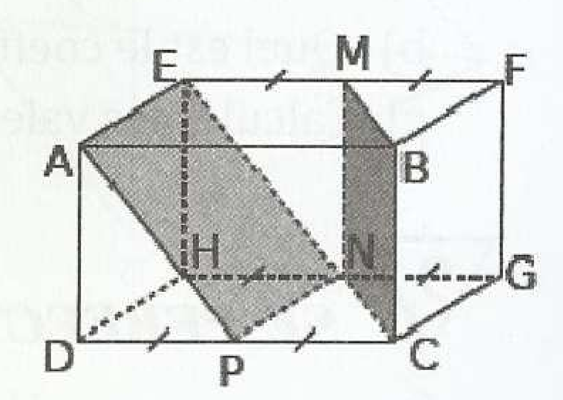




S'ENTRAINER

Un pavé droit ABCDEFGH est tel que :
AB = 6 cm, BC = 4 cm et BF = 3 cm.
M, N et P sont les milieux respectifs de [EF], [HG] et [DC].

a) Quelle est la nature des quadrilatères AENP et BMNC ? justifier la réponse.
b) Comparer les aires de ces deux rectangles.





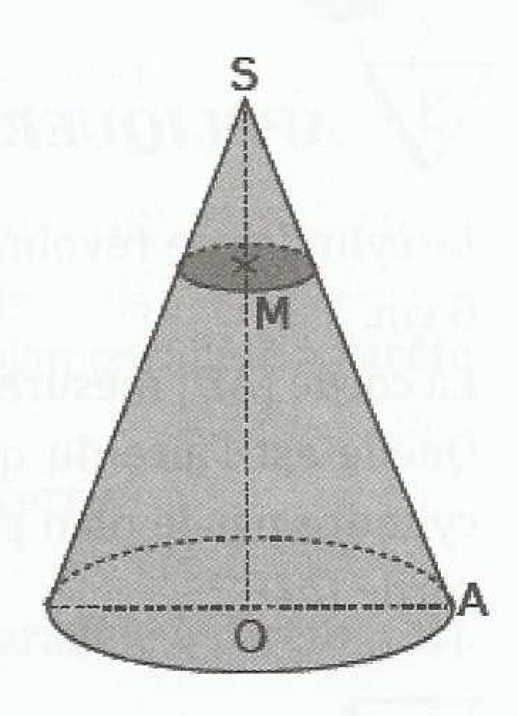
S'ENTRAINER

On réalise une section d'un cylindre de révolution de 3.5 cm de rayon de base et 6 cm de hauteur par un plan perpendiculaire à la base et passant par les centres des deux bases.

a) Quelle est la nature de la section ?
b) Calculer l'aire de la section en cm^2.



S'ENTRAINER



Le cône de révolution ci-contre de sommet S a une hauteur [SO] de 9 cm et un rayon de base [OA] de 5 cm.

a) Calculer le volume V_1 de ce cône en cm^3 près par défaut.

b) Soit M le point du segment [SO] tel que SM = 3 cm. On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par M. Calculer le rayon de cette section.

c) Calculer le volume V_2 du petit cône de sommet S ainsi obtenu au cm^3 près par défaut.



S'ENTRAINER

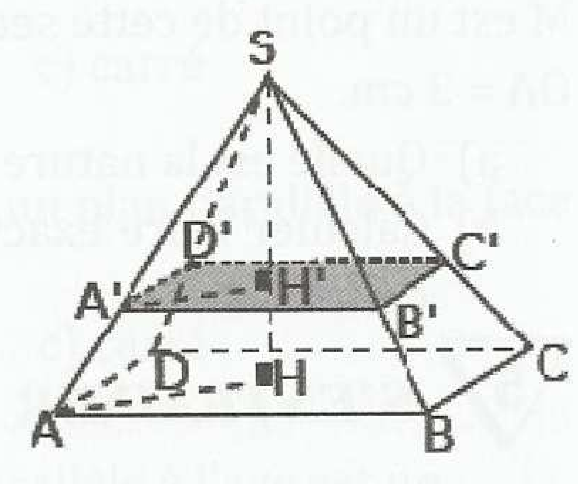
On réalise la section d'une pyramide SABCD à base rectangulaire par un plan parallèle à sa base et passant par A′.

AB = 6.4 cm

BC = 4.8 cm

A′H′ = 1.5 cm

SH = 15 cm



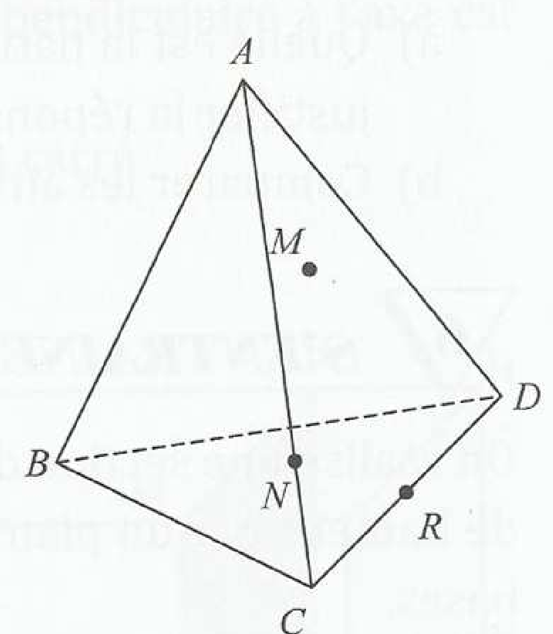
a) Calculer AH

b) Quel est le coefficient de réduction entre les pyramides SABCD et SA′B′C′D′ ?

c) Calculer les valeurs exactes des volumes de ces deux pyramides.



SE PERFECTIONNER



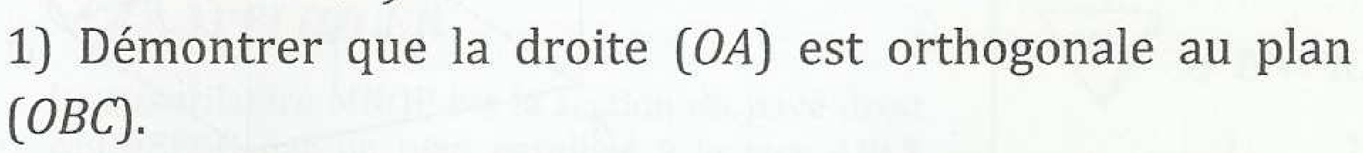
ABCD est un tétraèdre. *M* est un point de la face *ABD, N* un point de [*AC*] et *R* un point de [*CD*].

Construire la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*MNR*).



SE PERFECTIONNER

OABC est un tétraèdre dont les faces *OAB*, *OAC* et *OBC* sont des triangles rectangles isocèles en *O*, et *ABC* est un triangle équilatéral. On pose $OA = OB = OC = a$ (on a donc

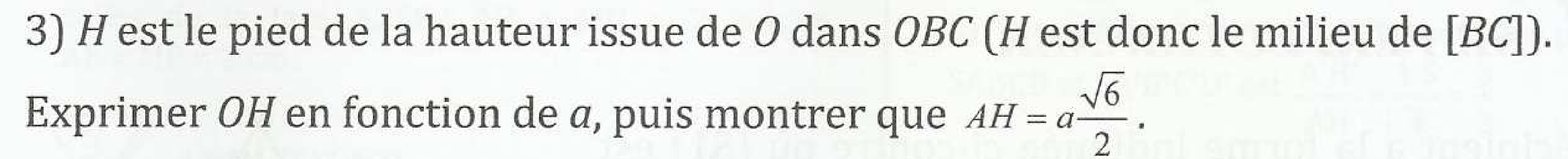


$AB = AC = BC = a\sqrt{2}$).

1) Démontrer que la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC).

2) Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre *OABC*.

3) H est le pied de la hauteur issue de O dans OBC (H est donc le milieu de $[BC]$).



Exprimer OH en fonction de a, puis montrer que $AH = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

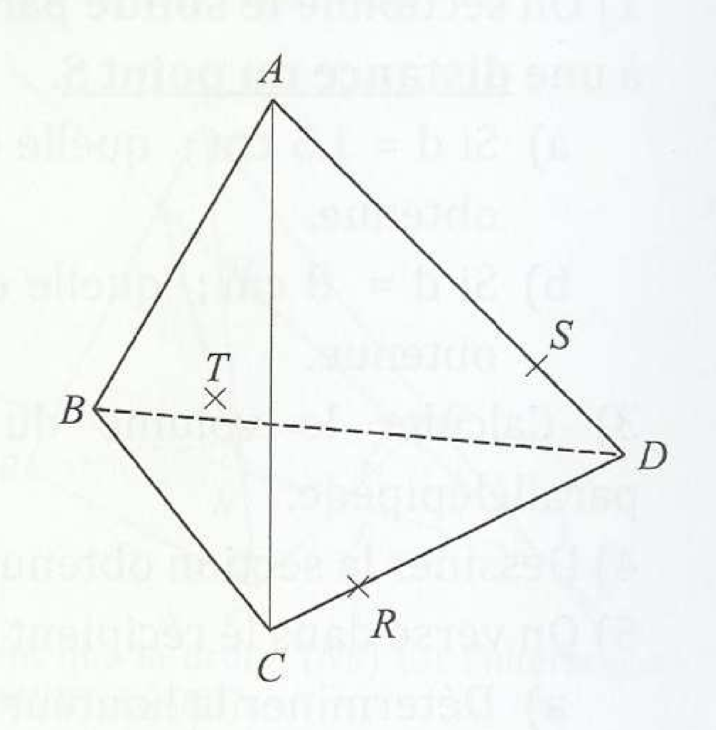
4) Calculer l'aire du triangle *ABC*.

5) Déduire des questions 2. et 4. la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre *OABC*.

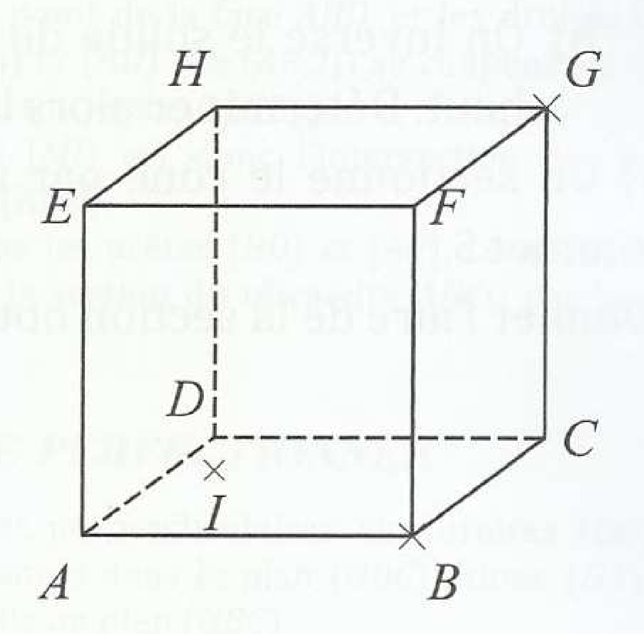


SE PERFECTIONNER

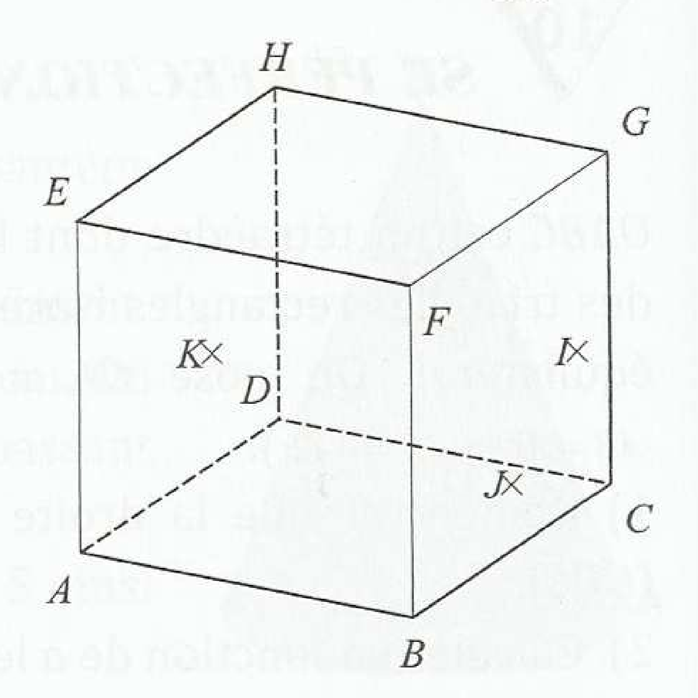
1) *ABCD* est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (RST).



2) *ABCDEFGH* est un cube, et I est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (IBG).



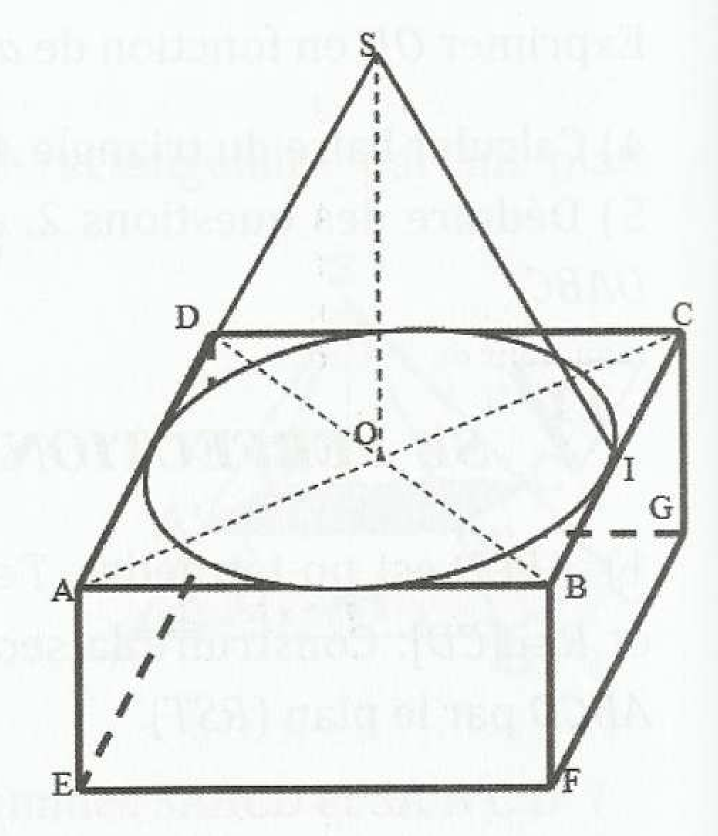
3) *ABCDEFGH* est un cube, *I* et *J* sont dans la face *BCGF*, et *K* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (*IJK*).





SE PERFECTIONNER

Un récipient a la forme indiquée ci-contre où (S1) est un cône de hauteur SO = 6 cm et (S2) est un parallélépipède rectangle de base EFGH **carré** tel que AB = 4,5 cm et AE = 5 cm. On pose I = B*C.



1) On sectionne **le solide** par un plan parallèle à ABCD à une **<u>distance du point S.</u>**

   a) Si d = 1.5 cm ; quelle est la nature de la section obtenue.

   b) Si d = 8 cm ; quelle est la nature de la section obtenue.

3) Calculer le volume du cône et celui de du parallélépipède.

4) Dessiner la section obtenue du récipient par le plan (ACGE).

5) On verse dans le récipient un volume d'eau égal à 81 cm^3.

   a) Déterminer la hauteur du niveau de l'eau dans le récipient.

   b) On inverse le solide de façon que le cône soit en bas et le parallélépipède en haut. Déterminer alors la hauteur h' du niveau de l'eau dans le récipient.

6) On sectionne le cône par un plan parallèle à sa base à une distance 1,5 cm du sommet S.

Donner l'aire de la section obtenue.



Q-C-M

1) b)
2) b)
3) c)
4) b)
5) b)
6) b)



APPLIQUER

Le quadrilatère MNOP est la section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à la face ABFE donc c'est un rectangle dont les dimensions sont celles de la face ABFE : AB = MN = 2 cm et AE = MP = 3 cm.



APPLIQUER

Le quadrilatère ABCD est la section du cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe donc c'est un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.
Donc AB = 6 cm.
Comme le quadrilatère ABCD est un rectangle, Aire de ABCD = AB × AD = 6 cm × 1.5 cm = 9 cm²



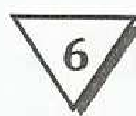
S'ENTRAINER

a) La nature de la section est un disque de centre A et de rayon AM.
b) L'aire du disque est $A = \pi \times AM^2 = \pi \times (OM^2 - OA^2) = \pi \times (64 - 9) = 55\pi \text{ cm}^2$.



S'ENTRAINER

a) (NP) // (AE) ⇒ AENP est un rectangle
(MN) // (BC) ⇒ BMNC est un rectangle.
b) L'aire de AENP est $AE \times AP = 3 \times \sqrt{4^2+3^2} = 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^2$
L'aire de BMNC est $BC \times BM = 4 \times \sqrt{3^2+3^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}^2$



S'ENTRAINER

a) La section est un rectangle de longueur la hauteur du cylindre et de largeur le diamètre de la base
b) L'aire du rectangle est 6 × 7 = 42 cm²



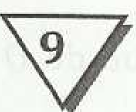
S'ENTRAINER

a) $V_1 = \frac{1}{3}(\pi \times 5^2) \times 9 = 75\pi \simeq 235.5 \text{ cm}^3$
b) $\frac{SM}{SO} = \frac{r}{OA} \Leftrightarrow r = OA \times \frac{SM}{SO} = 5 \times \frac{3}{9} = \frac{5}{3}$
c) $V_2 = \frac{1}{3}\left(\pi \times \left(\frac{5}{3}\right)^2\right) \times 3 = \frac{25}{9}\pi \simeq 8{,}7 \text{ cm}^3$

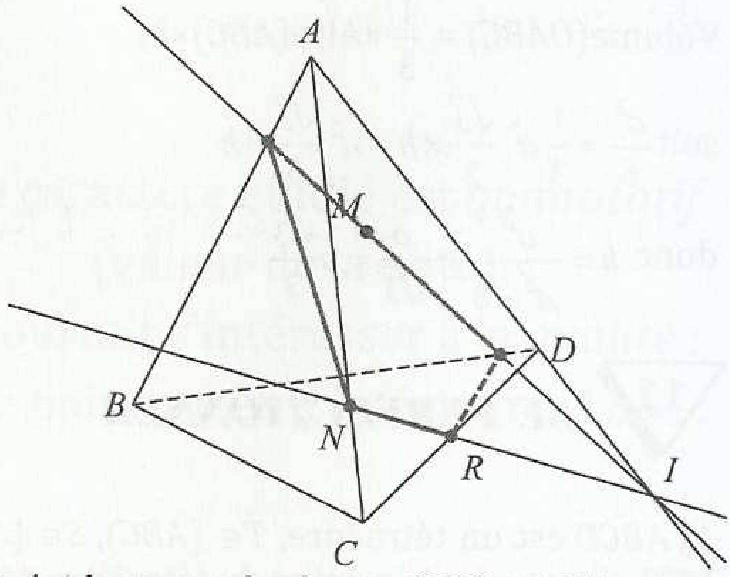


S'ENTRAINER

a) $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{(6.4)^2+(4.8)^2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4 \text{ cm}$
b) Le coefficient de reduction entre les pyramides SABCD et SA'B'C'D' est $\frac{A'H'}{AH} = \frac{1.5}{4} = \frac{3}{8}$
c) $V_1 = \frac{1}{3}(6.4 \times 4.8) \times 15 = 153.6 \text{ cm}^3$ est le volume de SABCD $V_2 = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times V_1 = 8.1 \text{ cm}^3$



SE PERFECTIONNER



Il est évident que la droite (*NR*) est l'intersection des plans (*MNR*) et (*ACD*).
M est un point de la face *ABD*, et les droites (*NR*) (de (*ACD*)) et (*AD*) (de (*ABD*)) se coupent en *I* (car sécantes dans le plan (*ACD*)).
La droite (*MI*) est donc l'intersection des plans (*MNR*) et (*ABD*).
(*MI*) coupe les arêtes [*BD*] et [*AB*], ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*MNR*).



SE PERFECTIONNER

1) (*OA*) est perpendiculaires aux droites (*OB*) et (*OC*) (sécantes dans le plan (*OBC*)), donc (*OA*) est orthogonale au plan (*OBC*).

2) Volume$(OABC) = \frac{1}{3} \times$Aire$(OBC) \times AO$

$= \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$.

3) H étant le milieu de $[BC]$, $[OH]$ est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle OBC rectangle en O, donc $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(OA) est orthogonale au plan (OBC) donc AOH est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore :

$AH^2 = AO^2 + OH^2$, $AH^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{6}{4}a^2$,

$AH = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Aire$(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}$

$= a^2\frac{\sqrt{12}}{4} = a^2\frac{\sqrt{4\times 3}}{4} = a^2\frac{2\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Soit h la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.
Volume$(OABC) = \frac{1}{3} \times$Aire$(ABC) \times h$,

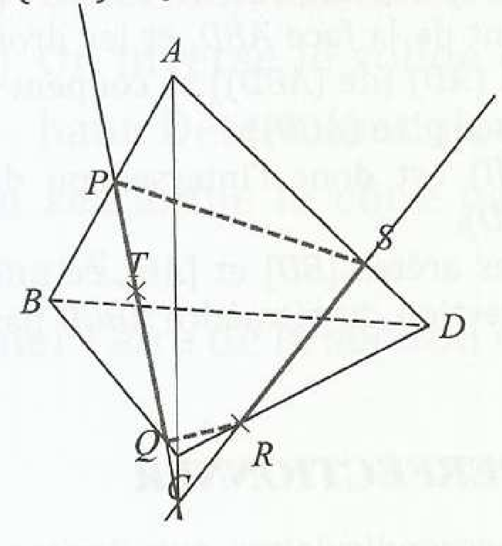
soit $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{2} \times h = a^2\frac{\sqrt{3}}{6} \times h$

donc $h = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

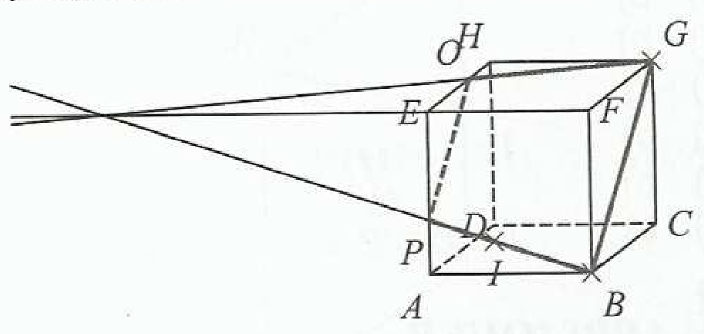


SE PERFECTIONNER

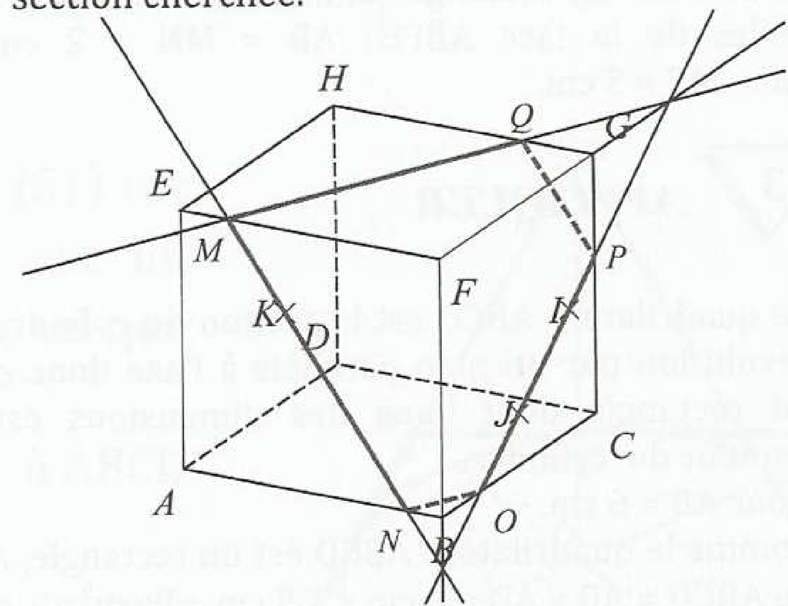
1) $ABCD$ est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST). $PQRS$ est la section cherchée.



2) $ABCDEFGH$ est un cube, et I est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IBG). $BGOP$ est la section cherchée.



3) $ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont dans la face $BCGF$, et K est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IJK). $MNOPQ$ est la section cherchée.



Exploitation de l'information

I) Résumé de cours

A. *Vocabulaire statistique :*

- **Population :** C'est l'ensemble étudié. (« population » est employé, ici dans un sens très particulier, elle n'est pas nécessairement humaine.). les éléments de l'ensemble sont appelés : *unités statistiques* ou *individus.*

Exemple :

Population : un ensemble de notes attribuées à 25 élèves.

Tableau de données :

12 10 12 9 9 10 15 12 8
13 8 6 10 11 11 11 9 11
12 13 11 8 11 13 10

- **Echantillon :** C'est un sous ensemble quelconque de la population. Si l'échantillon est prélevé au hasard, c'est un échantillon *aléatoire.*

- **Caractère (ou variable) :** C'est l'aspect de l'unité statistique auquel on s'intéresse. Il peut être *qualitatif :* couleur d'une voiture, etc. ou *quantitatif* : il se traduit alors par un nombre.

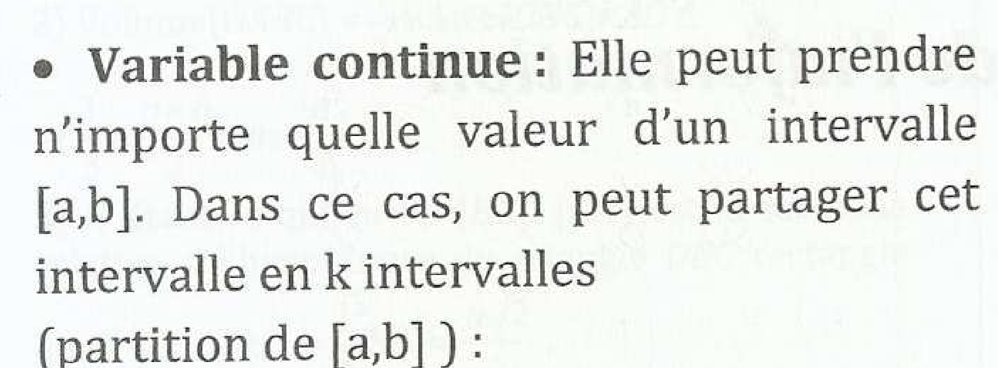
Ici le caractère étudié est *quantitatif* (valeur de la note).

On pourrait s'intéresser à la *qualité* : « être pair » ; « être inférieur à 12 »...

- **Valeur statistique** ou **valeur du caractère :** La valeur du caractère est sa mesure lorsqu'on a choisi une unité. On obtient des valeurs de la *variable statistique.*

- **Variable discrète(ou discontinue):** Elle ne prend que des valeurs isolées : $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

Ici variable discrète qui prend huit valeurs. $x_1 = 6; x_2 = 8; \ldots\ldots; x_8 = 15$.



- **Variable continue :** Elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle [a,b]. Dans ce cas, on peut partager cet intervalle en k intervalles (partition de [a,b]) :

$a < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{k-1} < b$

$[a,a_1[;[a_1,a_2[;\ldots\ldots[a_{k-1},b[$

Chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}[$ est appelé classe ; a_i et a_{i+1} sont les frontières de la classe, $\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ est le centre de la classe.

- **Effectif :** L'effectif de x_i est le nombre n_i d'observations associées à la valeur x_i de la variable statistique, ou l'effectif de la classe $[a_i;a_{i+1}[$.

- **L'effectif total :**

$N = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

- **Série statistique :** C'est l'ensemble des couples $(x_i;n_i)$ ou $([a_i;a_{i+1}[;n_i)$. On donne souvent cette série sous la forme d'un *tableau statistique.* Ne pas le confondre avec le *tableau de données* (succession de résultats).

Tableau statistique :

	x_i n_i
6	1
8	3
9	3
10	4
11	6
12	4
13	3
15	1
Total	$\sum_{i=1}^{i=8} n_i = 25$

- **Fréquence :** La fréquence de la valeur x_i ou de la classe $[a_i ; a_{i+1}[$ est le réel $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$.

- **Propriétés :**

* Pour toute i :$0 < f_i \leq 1$.

* La somme des fréquences est 1 : $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

- **Effectifs cumulés :**

***Effectif cumulé croissant :**

L'effectif cumulé croissant de la p[ième] classe est le nombre des observations correspondants aux valeurs de la variable inférieures ou égales à x_p ; on note :

$$E_p^{\nearrow} = \sum_{i=1}^{p} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_p \ .$$

***Effectif cumulé décroissant :**

$$E_p^{\swarrow} = \sum_{i=p}^{k} n_i = n_p + n_{p+1} + ... + n_k \ .$$

B. *Paramètres* de position :

- **La dominante** ou **mode** : C'est la valeur du caractère la plus fréquente. Dans une répartition par classes, on parle de classe modale.

- **La moyenne arithmétique**: C'est le quotient de la somme des mesures par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{\sum n_i}$$

$$\bar{x} = \sum f_i x_i$$

Dans une répartition par classes, on

x_i	f_i
6	0.04
8	0.12
9	0.12
10	0.16
11	0.24
12	0.16
13	0.12
15	0.04
Total	$\sum_{i=1}^{i=8} f_i = 1$

$$E_5^{\nearrow} = 1 + 3 + 3 + 4 + 6 = 17$$

$$E_5^{\swarrow} = 6 + 4 + 3 + 1 = 14$$

Exemple (des notes attribuées aux 25 élèves)

La dominante est 11 ; elle est unique.

C'est une série *uni modale.*

Calcul de la moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{265}{25} = 10.6$$

prend pour x_i le centre de la classe.

- **Médiane** : C'est la valeur Me du caractère telle que l'effectif des individus dont la valeur du caractère est inférieur à Me soit égal à l'effectif des individus dont la valeur du caractère est supérieur à Me.

La médiane est 11

En d'autres termes et en désignant par N l'effectif total, on a :

* N pair ; la médiane est alors la valeur du caractère de l'individu classé $\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{ième}}$.

* N impair ; la médiane est alors la valeur du caractère de l'individu classé $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ième}}$.

Les séries chronologiques

Une série chronologique exprime l'évolution d'une variable au cours d'une période de temps donné.

- **Variation absolue**

Cet instrument sert à mesurer la hausse ou la baisse subie par une grandeur entre deux dates.
On note V_A = Valeur d'arrivée ; V_D = Valeur de départ

Variation absolue = V_A - V_D

En Tunisie, la population était de 10225.1 en 2007, elle est de 10673.8 en 2011
La population a augmenté de (10673.8 – 10225.1) milles de personnes soit 448 700 personnes
Source : Institut National de la Statistique (INS)

- **Taux de variation (TV)**

Cet instrument sert à mesurer la hausse ou la baisse subie par une grandeur par rapport à une année donnée.
On note V_A = Valeur d'arrivée ;

La population en Tunisie a augmenté de 4.39% entre 2007 et 2011

V_D = Valeur de départ

Taux de Variation (TV) = $\frac{V_A - V_D}{V_D}$ x 100

$$\left(\frac{10673.8-10225.1}{10225.1}\right)\times 100$$

- **Coefficient multiplicateur (CM) ou facteur multiplicatif (FM)**

On cherche à savoir par combien la variable a été multipliée entre deux dates.CM = $\frac{V_A}{V_D}$

Entre 2007 et 2011, la population en Tunisie a été multipliée par $1.044\left(=\frac{10673.8}{10225.1}\right)$

II)Exercices



L'élève d'un professeur qui note sur 20 a eu 6 notes au premier trimestre, avec une moyenne trimestrielle de 10, puis 4 notes au deuxième trimestre, avec une moyenne trimestrielle de 15, puis 5 notes au troisième trimestre, avec une moyenne de 12. La moyenne de ses 15 notes de l'année est :

a)2 b) 12,3 c)12,5 d) 12,75 .

1) Lors d'un examen, 4 candidats ont passé la même épreuve. Les 3 premiers ont obtenu respectivement comme note 12/20, 10/20 et 13/20. La moyenne des 4 candidats est de 11,5/20.La note obtenue par le quatrième candidat est donc :

a) 10/20 b) 11/20 c) 12/20 d)On ne peut pas la calculer.

2) La moyenne des résultats d'une classe de 25 élèves à l'issue d'un contrôle de mathématiques noté sur 20 est de 12 exactement. Le professeur remarque que, si l'on ne tient pas compte de la meilleure note et de la plus basse, cette moyenne reste de 12. La meilleure note est supérieure ou égale à 16 et la plus basse inférieure ou égale à 7. Il n'y a eu que des notes entières à ce contrôle.

Parmi les affirmations ci-dessous, la (lesquelles) est/sont certaine(s) ?

a) La somme de la note la plus haute et de la note la plus basse est égale à 12.
b) La meilleure note est égale à 17 et la plus basse à 7.

c) Cette situation ne peut pas se produire.
d) Il y a 4 valeurs possibles pour la meilleure note.
e) Il est possible que la note la plus basse soit 3.

3) Après 4 devoirs, un élève calcule que sa moyenne est 14,5. Quelle note devra-t-il avoir au devoir suivant pour que sa moyenne sur l'ensemble des devoirs soit alors de 15 ?

a) 15,5 b) 16 c) 16,5 d) 17 e) 17, 5 .

4) Etant donnée une variable étudiée sur une population, à chaque individu est associé :

a) un nombre de modalités qui dépend de la variable
b) au moins une modalité de la variable
c) une et une seule modalité de la variable.

5) Le mode d'une variable est :

a) la modalité ayant le plus petit effectif
b) la modalité ayant le plus grand effectif
c) le plus grand des effectifs.

2 APPLIQUER

Il y avait 5 perroquets dans une cage et leur prix moyen était de 50 dinars. Un jour pendant le nettoyage de la cage, l'un des perroquets s'est envolé. Le prix moyen des 4 perroquets restants est maintenant de 40 dinars. Combien coûtait le perroquet qui s'est échappé ?

3 APPLIQUER

Lors d'un contrôle de maths, le meilleur élève de la classe était absent. La moyenne obtenue par les 18 élèves présents a été 9,5. Si le bon élève avait été présent, quelle note minimum aurait-il dû avoir pour que cette moyenne fût au moins 10 ?



4 APPLIQUER

On donne le tableau suivant qui donne l'évolution du nombre d'élèves de l'enseignement secondaire (public) en Tunisie entre 2007 et 2011

Année	*2006/2007*	*2007/2008*	*2008/2009*	*2009/2010*	*2010/2011*
Nombre d'élèves de l'enseignement secondaire (public)	501752	499936	475483	481848	466939

Calculer la variation absolue, le taux de variation et le coefficient multiplicateur de cette série.



APPLIQUER

Donner la valeur médiane de chacune des séries suivantes

a) Série de prix de vente

PV en D	12	17	21	25	32	40	13

b) *Nombre d'achats journaliers*

Nombre	42	56	68	76	84	92



APPLIQUER

On a relevé le montant de 200 chèques remis à un guichet, et obtenu le tableau suivant :

Montant des chèques En dinars	*Effectif*	*ECC*	*Fréquences (%)*	*FCC*
[0 ; 500[	26			
[500 ; 1000[	110			
[1000 ; 1500[	42			
[1500 ; 2000[	22			
Total	N = ………			

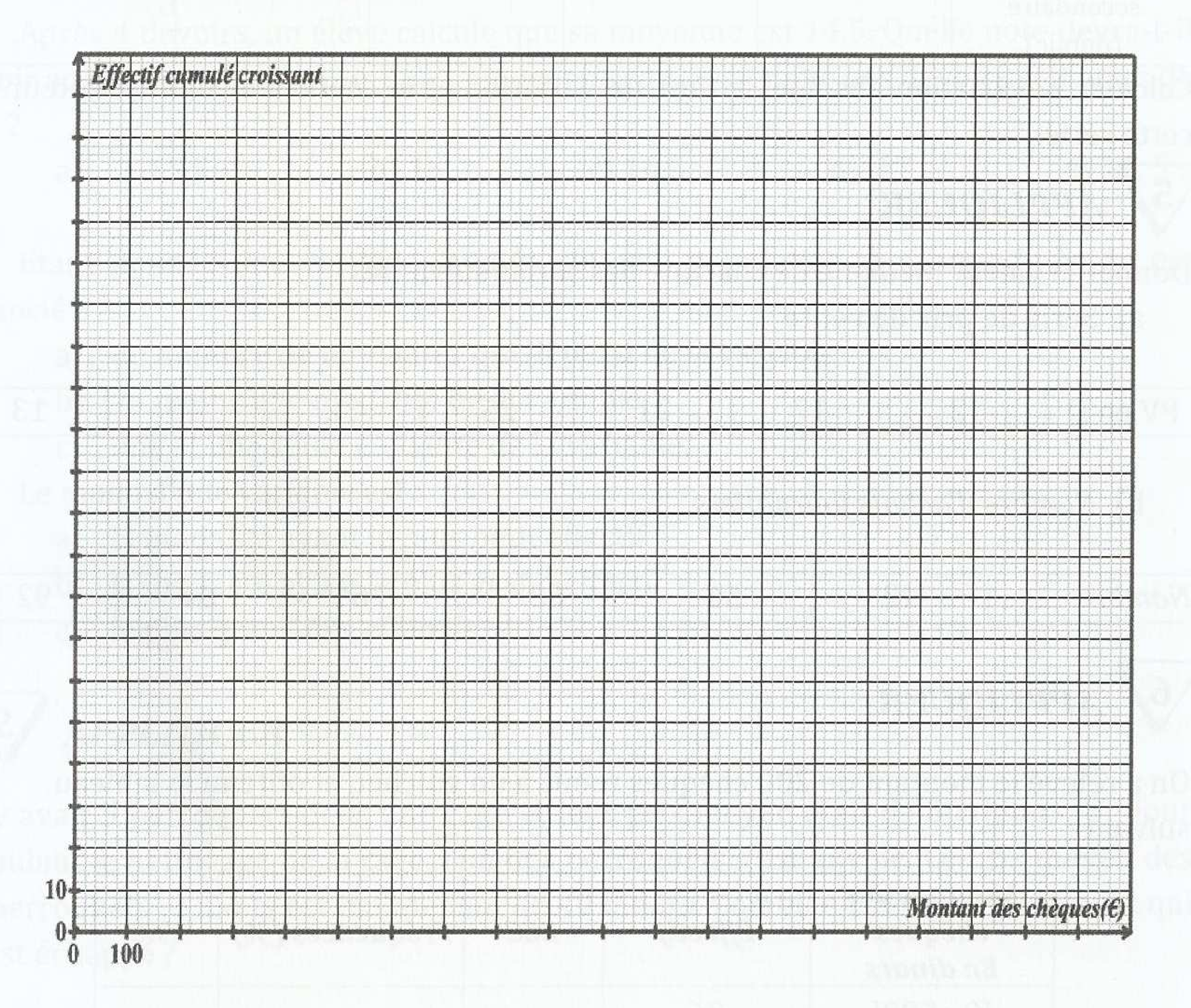
1) Compléter le tableau ci-dessus.

   a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants dans le repère ci-dessous

b) Placer sur ce graphique les points ***A (500; 26)*** et ***B(1 000; 136)***

c) Placer le point ***M*** dont l'ordonnée représente la moitié de l'effectif total $(\frac{N}{2})$.

Soit ***Me*** l'abscisse du point ***M***.



d) Calculer le coefficient directeur ***a*** de la droite(***AB***) de 2 façons différentes :

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ = ... ;

$a = \frac{y_M - y_A}{Me - x_A}$ = ...

e) Comparer les 2 résultats et en déduire la valeur de la médiane ***Me***.

Me = ...



S'ENTRAINER

Les 33 élèves d'une classe ont obtenu les notes suivantes lors d'un devoir :

Note	2	4	5	8	10	11	12	14	15	18	20
Effectif	1	2	1	4	2	7	6	3	4	2	1

1) Déterminer l'étendue et le mode de cette série.
2) Calculer la moyenne de cette série.
3) Construire un tableau donnant les effectifs cumulés, les fréquences et les fréquences cumulées.
4) Déterminer la médiane de cette série.
5) Quel est le nombre d'élèves ayant une notre strictement inférieure à 8 ?
6) Quel est le pourcentage d'élèves ayant une note supérieure ou égale à 10 ?



S'ENTRAINER

Répartition du nombre de supermarchés dans un pays suivant la surface en m2 :

Surface	[400 ;800[	[800 ;1000[	[1000 ;2500]
Effectif	2613	928	3379

1) Déterminer la surface moyenne $\overline{x}$ d'après ce regroupement par classe.
2) Sachant que la surface totale de vente est de 6739000 m^2 , calculer la surface moyenne d'un supermarché
Comparer avec la valeur obtenue à la question 1.



S'ENTRAINER

On considère la série statistique définie par le tableau suivant , qui donne la récolte de blé en tonnes de 100 agriculteurs :

Classe	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[
Effectif	20	18	14	22	26

Déterminer la médiane de cette série.



SE PERFECTIONNER

On a indiqué dans le tableau suivant la distance entre le bureau et le domicile (en km) d'un groupe d'employés.

Distance	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	5	21	24	15	20	13	2

1) a) Combien d'employés comporte le groupe étudié ?

b) Déterminer la distance moyenne entre le domicile et le lieu de travail.

2) Quelle est la médiane de cette série ?

3) On s'intéresse maintenant uniquement aux employés qui n'habitent pas dans les environs immédiats du bureau (ceux qui habitent à au moins 1 kilomètre).
Quel est, parmi eux, le pourcentage des employés qui travaillent à cinq kilomètres ou plus de leur domicile (on arrondira au centième) ?



SE PERFECTIONNER

On effectue un contrôle de la qualité pendant 100 heures de travail sur deux machines produisant des pièces mécaniques destinées à la fabrication de grues.
Certaines pièces présentent un défaut qui les rend inutilisables.
On a relevé le nombre de pièces inutilisables constatées durant chaque heure :

Machine A :

Nombre de pièces inutilisables	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombres d'heures	13	42	38	2	2	1	1	1

Machine B :

Nombre de pièces inutilisables	0	1	2	3	4	5
Nombres d'heures	35	40	1	1	10	13

1) a) Calculer le nombre moyen m_A de pièces inutilisables pendant les 100 heures étudiées pour la machine A.

b) Calculer le nombre moyen m_B de pièces inutilisables pendant les 100 heures étudiées pour la machine B.

2) a) Déterminer la médiane, puis l'écart interquartile dans le cas de la machine A. Calculer l'étendue E_A .

b) Déterminer la médiane, puis l'écart interquartile dans le cas de la machine B. Calculer l'étendue E_B .

3) Quel(s) paramètre(s) semble(nt) le(s) plus intéressant(s) à exploiter pour comparer ces deux machines ? Justifier.

12 SE PERFECTIONNER

1) Le tableau suivant donne les notes d'un devoir de contrôle de mathématiques de 25 élèves d'une classe :

Notes	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[
Effectifs	8	7	5	2	3

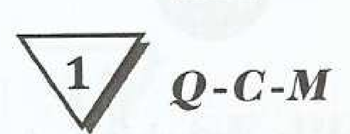
a) Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
b) En déduire graphiquement la médiane M_e de cette série.

2) Le tableau suivant donne les notes du devoir de synthèse de cette classe

Notes	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs	3	6	x	1	2	3	y	2	1

Seulement le professeur a oublié combien d'élèves ont eu 9 et combien ont eu 13, il se rappelle que la moyenne était de 10,04

a) Aider lui à retrouver x et y.
b) En déduire le mode et la médiane de cette série statistique.



1 Q-C-M

1) La moyenne de ses 15 notes de l'année est $\frac{6\times10+4\times15+5\times12}{15}=\frac{180}{15}=12$

2) On a $\frac{12+10+13+x}{4}=11.5$

$\Leftrightarrow 35+x=4\times11.5$

$\Leftrightarrow x=11$

La note obtenue par le quatrième candidat est donc 11/20.

3)

a) La somme de la note la plus haute et de la note la plus basse est égale à 12 : vrai.

b) La meilleure note est égale à 17 et la plus basse est égaleà 7 : faux ; c'est une des solutions mais pas la seule.

c) Cette situation ne peut pas se produire : faux ; il y a au moins la solution (17 ; 7).

d) Il y a 4 valeurs possibles pour la meilleure note : vrai ; les solutions sont (17 ; 7), (18 ; 6), (19 5), (20 ; 4).

e) Il est possible que la note la plus basse soit 3 : faux ; sinon la plus haute serait 21.

4) On doit avoir $\frac{4\times14.5+x}{5}=15$, soit x = 5 × 15 – 4 × 14.5 = 75 – 58 = 17. L'´el`eve devra donc avoir 17 au devoir suivant pour que sa moyenne sur l'ensemble des devoirs soit de 15.

5) Etant donnée une variable étudiée sur une population, à chaque individu est associé une et une seule modalité de la variable.

6) Le mode d'une variable est la modalité ayant le plus grand effectif.



2 APPLIQUER

Le total des prix des 5 perroquets était 5 × 50 = 250 dinars ; il est maintenant de 4 × 40 = 160 dinars avec les 4 perroquets restants. Le coût du perroquet échappé est donc 250 – 160 = 90 dinars.

3 APPLIQUER

Le total des notes obtenues par les 18 élèves est 18 × 9.5 = 171. Pour avoir 10 avec lemeilleur élève, il faudrait que la somme des 19 notes soit 190. Ainsi, le meilleur élève aurait dûavoir 190 - 171 = 19 pour que cette moyenne fût au moins 10.



4 APPLIQUER

La variation absolue est 466939 – 501752 = - 34 813 (il est clair qu'il sagit d'une baisse)

Le taux de variation est

$$\left(\frac{466939-501752}{501752}\right)\times100=-6.94\,\%$$

Le coefficient multiplicateur de cette série est $\frac{466939}{501752}=0.93$

5 APPLIQUER

a) Série de prix de vente

PV en D	12	17	21	25	32	40	13

Prix médian = ...25 D..............

b) Nombre d'achats journaliers

Nombre	42	56	68	76	84	92

Nombre d'achats médian = ... $\frac{(68+76)}{2}$ = 72 achats ....



6 APPLIQUER

1) Tableau

Montant des chèques (D)	Effectif	ECC	Fréquences (%)	FCC
[0 ; 500[	26	26	13	13
[500 ; 1000[	110	136	55	68
[1000 ; 1500[	42	178	21	89
[1500 ; 2000[	22	200	11	100
Total	200		100	

c. Calculer le coefficient directeur a de 2 façons différentes :

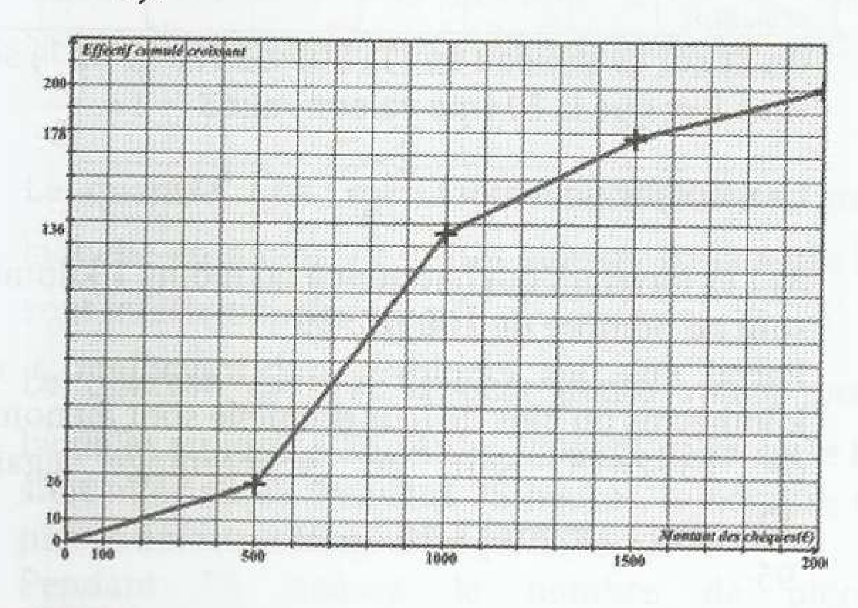
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{62 - 30}{15 - 10} = \frac{32}{5} = 6{,}4 \ldots\ldots ;$$

$$a = \frac{y_M - y_A}{Me - x_A} = \frac{46{,}5 - 30}{Me - 10} = \frac{16{,}5}{Me - 10}.$$

D' où :

$$\frac{16{,}5}{Me - 10} = 6{,}4 \Rightarrow$$

$$Me = \frac{16{,}5}{6{,}4} + 10 \approx 12{,}6$$



7 S'ENTRAINER

1) L'étendue de cette série est la différence entre les valeurs extrêmes de la série. Elle vaut ici 20-2=18

Le mode de cette série est la valeur du caractère correspondant à l'effectif maximum. Il vaut ici 11

2) La moyenne de cette série statistique est égale à

$$\bar{x} = \frac{1\times 2 + 2\times 4 + \ldots\ldots + 1\times 20}{1 + 2 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 2 + 1} = \frac{374}{33} \simeq 11.33$$

arrondi au centième.

3) Les fréquences sont égales au quotient entre les effectifs et l'effectif total.

Note	2	4	5	8	10	11	12	14	15	18	20
Effectif	1	2	1	4	2	7	6	3	4	2	1
Effectifs cumulés croissants	1	1 + 2 = 3	3 + 1 = 4	4 + 4 = 8	8 + 2 = 10	10 + 7 = 17	17 + 6 = 23	23 + 3 = 26	26 + 4 = 30	30 + 2 = 32	32 + 1 = 33

Fréquences	$\frac{1}{33}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{6}{33}$	$\frac{3}{33}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{33}$
Fréquences cumulées croissantes	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{33}+\frac{2}{33}=\frac{3}{33}$	$\frac{3}{33}+\frac{1}{33}=\frac{4}{33}$	$\frac{4}{33}+\frac{4}{33}=\frac{8}{33}$	$\frac{8}{33}+\frac{2}{33}=\frac{10}{33}$	$\frac{10}{33}+\frac{7}{33}=\frac{17}{33}$	$\frac{17}{33}+\frac{6}{33}=\frac{23}{33}$	$\frac{23}{33}+\frac{3}{33}=\frac{26}{33}$	$\frac{26}{33}+\frac{4}{33}=\frac{30}{33}$	$\frac{30}{33}+\frac{2}{33}=\frac{32}{33}$	$\frac{32}{33}+\frac{1}{33}=\frac{33}{33}$

(Remarque : la dernière ligne peut être obtenue par quotient des effectifs cumulés et de l'effectif total)

4) La médiane d'une série ordonnée de 33 valeurs est égale à 17ème valeur

D'après le tableau dressé en question 2, 10 élèves ont une note inférieure ou égale à 10 tandis que 17 élèves ont une note inférieure ou égale à 11

La note du 17ème élève se situe donc parmi les 7 notes égales à 11.

La médiane de cette série statistique est donc égale à 11.

5) D'après le tableau des effectifs cumulés croissants de la question 3), il y a 4 élèves qui ont une notestrictement inférieure à 8

6) Toujours d'après le tableau de la question 3), 8 élèves sur 33 ont une note strictement inférieure à 8, donc 33- 8=25 élèves ont une note supérieure ou égale à 10, soit un pourcentage égal à

$$\frac{25}{33}\times 100 \simeq 75.75\ \%$$

8 S'ENTRAINER

1) Pour déterminer la surface moyenne x , il faut considérer le milieu de chaque intervalle.

On obtient le tableau :

Surface	600	900	1750
Effectif	2613	928	3379

On calcule :

$$\bar{x} = \frac{600\times 2613 + 900\times 928 + 1750\times 3379}{2613 + 928 + 3379}.$$

$\simeq 1201.77 m^2$ à 10^{-2} près

2) Il y a au total 2613+928+3379=6920 supermarchés.

Si la surface totale de vente est de 6739000 m^2, la surface moyenne d'un supermarché est égale à

$\frac{6739000}{6920} \simeq 973.84m^2$ à 10^{-2} près

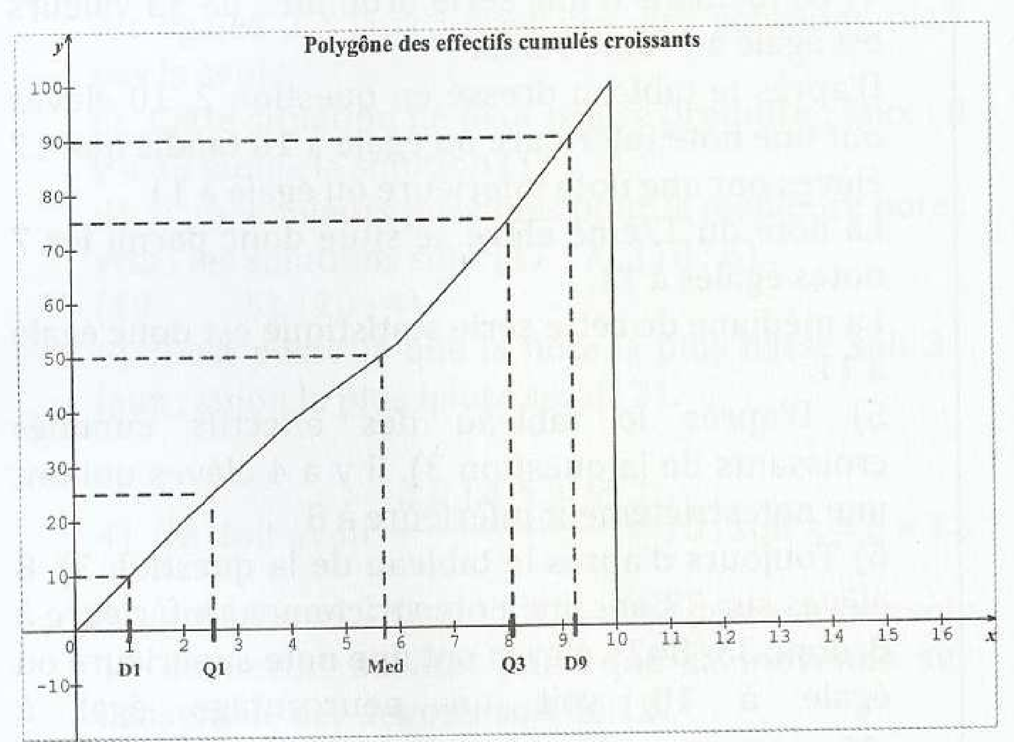
Cette dernière valeur est bien inférieure à celle obtenue à la question 1.



9 S'ENTRAINER

On a N=100 est pair donc $\frac{N}{2}$ =50.

Classe	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[
Effectif cumulé croissant	20	38	52	74	100



La médiane M_e est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé 50 :

4	38
M_e	50
6	52

$\frac{M_e-4}{6-4}=\frac{50-38}{52-38}$ signifie $\frac{M_e-4}{2}=\frac{12}{14}$ signifie

$M_e-4=\frac{24}{14}\simeq 1,71 \Rightarrow M_e=5,71$



10 SE PERFECTIONNER

1) a) L'effectif total du groupe s'élève à 5+21+24+15+20+13+2 = 100 employés

b) La distance moyenne entre le domicile et le lieu de travail vaut : $\overline{x}=2.75$

La distance moyenne entre le domicile et le lieu de travail vaut donc 2,75 km

2) La médiane d'une série statistique comportant 100 valeurs rangées dans l'ordre croissant est égale à la demi somme de la 50ème et de la 51ème valeur.

On peut dresser un tableau des effectifs cumulés croissants de la série statistique :

Distance	0	1	2	3	4	5	6
Effectif cumulé croissant	5	26	50	65	85	98	100

On lit sur ce tableau que la 50ème valeur de la série vaut 2 et que la 51ème valeur vaut 3

La médiane vaut alors $\frac{2+3}{2}=2.5$ km

3) Les ouvriers qui habitent à au moins 1 kilomètre sont au nombre de 100-95=95

Parmi eux, les employés qui travaillent à cinq kilomètres ou plus de leur domicile sont au nombre de 13+2=15, soit un pourcentage égal à $\frac{15}{95}\times 100 \simeq 15.79\,\%$ à 10^{-2} près



11 SE PERFECTIONNER

1) a) On calcule pour la machine A :

$$m_A=\frac{13\times 0+42\times 1+38\times 2+2\times 3+2\times 4+1\times 5+1\times 6+1\times 7}{13+42+38+\dots\dots\dots+1+1}$$

$$=\frac{150}{100}=1.5$$

Pendant les 100 heures étudiées pour la machine A, il y a en moyenne 1,5 pièce inutilisable.

b) On calcule de même pour la machine B :

$$m_B=\frac{35\times 0+40\times 1+1\times 2+1\times 3+10\times 4+13\times 5}{35+40+\dots\dots+13}$$

$$=\frac{150}{100}=1.54$$

Pendant les 100 heures étudiées pour la machine B, il y a en moyenne 1,5 pièce inutilisable.

2) a) La médiane de la série ordonnée de 100 valeurs relatives à la machine A est la demisomme entre la 50ème et la 51ème valeur, soit ici $\frac{1+1}{2}=1$

Le quartile Q_1 est la plus petite valeur pour laquelle au moins 25 % des valeurs de la série lui sont inférieures. Ici Q_1 =1

Le quartile Q_3 est la plus petite valeur pour laquelle au moins 75 % des valeurs de la série lui sont inférieures. Ici $Q_3 = 2$

L'écart interquartile dans le cas de la machine A vaut $Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$.

L'étendue correspond à la différence entre les valeurs maximale et minimale donc $E_A = 7 - 0 = 7$

b) La médiane de la série ordonnée de 100 valeurs relatives à la machine B est la demi-sommeil entre la 50ème et la 51ème valeur, soit ici $\frac{1+1}{2} = 1$

Le quartile Q_1 est la plus petite valeur pour laquelle au moins 25 % des valeurs de la série lui sont inférieures. Ici $Q_1 = 0$

Le quartile Q_3 est la plus petite valeur pour laquelle au moins 75 % des valeurs de la série lui sont inférieures. Pendant 75 heures, le nombre de pièces défectueuses a été égal à 0 ou 1.
Pendant 76 heures, le nombre de pièces défectueuses a été égal à 0,1 ou 2.

Le quartile Q_3 sera par convention la moyenne entre la 75ème et la 76ème valeur, soit $\frac{1+2}{2} = 1.5$

Ainsi $Q_3 = 1{,}5$

L'écart interquartile dans le cas de la machine B vaut $Q_3 - Q_1 = 1{,}5 - 0 = 1{,}5$.

L'étendue correspond à la différence entre les valeurs maximale et minimale donc $E_B = 5 - 0 = 5$

3) Dans le cas des deux machines ci-dessus, puisque leurs moyennes sont identiques, l'écart interquartile nous indique que la machine A semble donc plus « homogène » que la machine B.

Sommaire



Kounouz Ennajeh

MATHEMATIQUES

Première année de l'enseignement secondaire

+ Corrigés Détaillés de tous les exercices

Ce parascolaire s'adresse aux élèves de l'enseignement secondaire. Son principal objectif est de venir en aide aux apprenants. D'ailleurs, le livre se donne les moyens de ses objectifs.

En effet, ce parascolaire se veut un allié de l'apprentissage des mathématiques. Il allie cours, approfondissement et enrichissement des connaissances. Dans un souci d'efficacité, nous avons délibérément choisi de suivre la démarche et la progression proposées dans le manuel scolaire
Par conséquent, les modules présentés vont en parallèle avec ceux du manuel scolaire afin de mieux répondre aux attentes et aux besoins des élèves.
Ainsi, à l'instar du manuel, chaque chapitre s'organise autour de plusieurs activités :

- Résumés du cours
- Exercices
- Corrigés des exercices

Dans la même Collection







7eme année de Base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية- علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

8eme annee de Base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات

9eme année de base

العربية – الفرنسية – الإنقليزية علوم الحياة والأرض – الرياضيات
الفيزياء – تربية تقنية – امتحانات – جذاذات

1eme année de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات
العربية – الفرنسية –الإنقليزية – امتحانات
Devoirs- informatique- SVT
Physique.chimie

2eme annee de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات
العربية – الفرنسية –الإنقليزية – امتحانات
Devoirs- informatique- SVT
Physique.chimie

3eme annee de l'enseignement secondaire

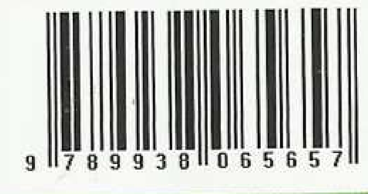
تربية تقنية – الرياضيات– تاريخ و جغرافيا
العربية – الفرنسية –الإنقليزية
Devoirs- informatique- SVT- Economie.Gestion
Technologie- Physique.chimie

4eme annee de l'enseignement secondaire

تربية تقنية – الرياضيات– تاريخ و جغرافيا
العربية – الفرنسية –الإنقليزية
Devoirs- informatique- SVT
Economie.Gestion
Technologie- Physique.chimie


كنوز للنشر و التوزيع
KOUNOUZ EDITIONS
www.kounouz-edition.com

Prix : 7.500 DT


9 789938 065657
ISBN : 978-9938-06-565-7